This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

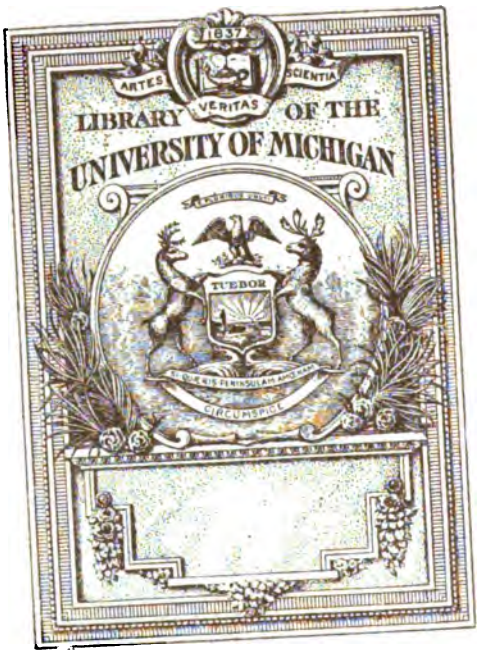
+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`



THE GIFT OF
PROF. ALEXANDER ZIWET

Q
8
.H

TRAITÉ

DES

MÉCANISMES.

L'Auteur et l'Éditeur de cet Ouvrage se réservent le droit de le traduire ou de le faire traduire en toutes langues. Ils poursuivront, en vertu des Lois, Décrets et Traités internationaux, toutes contrefaçons, soit du texte, soit des gravures, ou toutes traductions faites au mépris de leurs droits.

Le dépôt légal de cet Ouvrage a été fait à Paris dans le cours de 1864, et toutes les formalités prescrites par les Traités sont remplies dans les divers États avec lesquels la France a conclu des conventions littéraires.

Tout exemplaire du présent Ouvrage qui ne porterait pas, comme ci-dessous, la signature de l'Éditeur, sera réputé contrefait. Les mesures nécessaires seront prises pour atteindre, conformément à la loi, les fabricants et les débitants de ces exemplaires.

Gauthier Villars

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS,
Rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.

239

Alexander Ziwet

TRAITÉ

DES

MÉCANISMES,

RENFERMANT

LA THÉORIE GÉOMÉTRIQUE DES ORGANES

ET CELLE DES RÉSISTANCES PASSIVES,

PAR

J.-N^a^ HATON DE LA GOUPILLIÈRE,

Ingénieur des Mines, Examinateur d'admission à l'École Polytechnique, Professeur suppléant de Mécanique à la Faculté des Sciences de Paris.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1864

(L'Auteur et l'Éditeur de cet Ouvrage se réservent le droit de traduction.)

Prof. A. Ziwet
qt.
12-23-1922

Stachs

AVANT-PROPOS.

Il ne faut pas voir dans ce *Traité des Mécanismes* un Traité de Machines. On distingue, en effet, dans toute machine trois parties principales : le moteur, l'outil et les mécanismes intermédiaires destinés à les relier l'un à l'autre. Les moteurs et les machines-outils forment l'objet d'ouvrages spéciaux. Celui-ci est exclusivement consacré aux Mécanismes, dont j'ai cherché à présenter une théorie complète.

Cet ordre de considérations a pris naissance à une époque peu éloignée de nous. L'impulsion est due à Monge et à Ampère. Plusieurs auteurs ont d'ailleurs écrit sur cette matière, en l'embrassant complétement. Je dois citer parmi eux Lantz et Bétancourt (1), Hachette (2), Willis (3), M. Laboulaye (4), M. le général Morin (5), M. Girault (6) et M. Belanger (7). Dans ces

(1) *Essai sur la composition des machines;* 1808.

(2) *Traité des Machines;* 1811.

(3) *Principles of Mechanism;* 1841.

(4) *Traité de Cinématique;* 1849.

(5) *Leçons de Mécanique pratique;* 1850.

(6) *Éléments de Géométrie appliquée à la transformation du mouvement dans les machines;* 1858.

(7) *Cinématique;* 1864.

413423

derniers temps, ce sujet a été introduit dans les Cours de Mécanique de l'École Polytechnique, de l'École impériale des Mines, de l'École centrale des Arts et Manufactures. Enfin, en 1861, j'ai eu l'honneur d'être chargé d'un Cours spécial sur les Mécanismes à la Faculté des Sciences de Paris. Ce volume est donc pour moi le résultat de dix années d'enseignement à l'École des Mines ou à la Sorbonne.

Je m'empresse ici de témoigner de l'utile secours que j'ai trouvé dans les Ouvrages antérieurs. J'ai cru cependant devoir substituer un plan absolument différent à celui que tous ont suivi, d'après Monge, à peu près sans modification. J'explique plus loin (1) les raisons qui m'ont fait donner la préférence à un cadre tout nouveau. Je me contenterai ici de dire qu'il se prête beaucoup mieux à l'enseignement oral et qu'il m'a permis, en outre, de développer largement la plupart des théories, tout en les condensant sous une forme plus simple.

Cet ouvrage comprend deux parties distinctes. Dans la première, les organes sont envisagés au point de vue géométrique; dans la seconde, au point de vue dynamique. Cette dernière partie est consacrée à l'étude des résistances passives. Je m'y suis proposé un double but : exposer complétement l'état actuel de la science sous ce rapport, et appliquer ces connaissances aux éléments de machines. On arrive par là à mieux comprendre tout à la fois ces principes eux-mêmes et les fonctions des mécanismes.

---

(1) Introduction, XXVII.

J'ai fait précéder cette exposition d'un précis de Cinématique en forme d'introduction. Il présente un autre caractère que le corps de l'ouvrage. On n'y trouvera rien qui ne soit bien connu et aujourd'hui passé dans l'enseignement, de sorte que j'ai pu m'y abstenir de citer les auteurs et les sources originales. Il n'en était pas moins nécessaire pour permettre d'employer avec facilité les nouvelles méthodes. Ce sont elles, en effet, qui m'ont servi de base pour asseoir tout l'ensemble de la théorie.

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

AVANT-PROPOS V

TABLE DES MATIÈRES IX

TABLE SYSTÉMATIQUE DES MÉCANISMES XIX

INTRODUCTION 1

CINÉMATIQUE 1

Définitions 1

Mouvement d'un point 2

Mouvements simples des solides 4

Mouvement plan 9

Mouvement d'un solide 11

Composition des mouvements 14

Théorème du mouvement relatif 19

Roulement et glissement 21

CLASSIFICATION 23

Généralités sur les machines 23

Classification des mécanismes 25

Classification de Monge 27

PREMIÈRE PARTIE.

THÉORIE GÉOMÉTRIQUE.

CHAPITRE Ier. — GALETS DE TRANSMISSION UNIFORME 31

§ I. — *Généralités* 31

§ II. — *Galets de transmission uniforme* 34

§ III. — *Exemples* 37

Galets fixes 37

Galets mobiles 39

Galets d'interposition 41

Pages.

CHAPITRE II. — GALETS DE TRANSMISSION VARIABLE..... 43

§ I. — *Spirale logarithmique*..... 43

§ II. — *Sections coniques*..... 46

Ellipse..... 46
Hyperbole..... 48
Parabole..... 48

§ III. — *Profils dérivés*..... 49

Principe général..... 49
Profils dérivés des sections coniques..... 56

§ IV. — *Méthode d'Euler*..... 57

Méthode générale..... 57
Exemple..... 59

CHAPITRE III. — GLISSIÈRES..... 62

§ I. — *Généralités*..... 62

Glissières cylindriques..... 64
Glissières de révolution..... 64
Glissières héliçoïdales..... 65
Glissières à double effet..... 65

§ II. — *Exemples*..... 66

Glissières cylindriques..... 66
Glissières de révolution..... 67
Glissières héliçoïdales..... 69

CHAPITRE IV. — EXCENTRIQUES A RAINURE..... 71

§ I. — *Rainures rectilignes*..... 71

Généralités..... 71
Rainures rectilignes..... 72

§ II. — *Plateau ou cône à rainure*..... 75

Généralités..... 75

Ex. I. — Repos..... 76
Ex. II. — Transmission uniforme..... 76
Ex. III. — Transmission sinusoïdale..... 77

Pages.

§ III. — *Tige à rainure*..... 77
Généralités..... 77
Ex. I. — Repos..... 78
Ex. II. — Transmission uniforme..... 78
Ex. III. — Transmission sinusoïdale..... 79
§ IV. — *Cylindre à rainure*..... 80
Généralités..... 80
Ex. I. — Repos..... 81
Ex. II. — Transmission uniforme..... 81
Ex. III. — Transmission sinusoïdale..... 81
CHAPITRE V. — Excentriques a cadre..... 82
§ I. — *Excentriques à cadre perpendiculaire*..... 82
Loi du mouvement..... 82
Méthode géométrique..... 82
Ex. I. — Repos..... 83
Ex. II. — Transmission uniforme..... 83
Ex. III. — Transmission sinusoïdale..... 83
Méthode analytique..... 85
Méthode graphique..... 85
Excentriques variables..... 87
§ II. — *Excentriques à cadre circonscrit*..... 87
Loi du mouvement..... 87
Ex. I. — Repos..... 89
Ex. II. — Transmission uniforme..... 89
Ex. III. — Transmission sinusoïdale..... 90
Méthode géométrique..... 91
Ex. I. — Repos..... 92
Ex. II. — Transmission uniforme..... 92
Ex. III. — Transmission sinusoïdale..... 92
Méthode analytique..... 93
CHAPITRE VI. — Engrenages plans..... 96
§ I. — *Généralités*..... 96
Généralités..... 96
Méthode des enveloppes..... 98
Méthode des roulettes..... 99

Pages

§ II. — *Exemples*..... 101

§ III. — *Courbure des engrenages*..... 107

Formule de Savary..... 107

Tracé approximatif de Willis..... 111

CHAPITRE VII. — SURFACES DES ENGRENAGES..... 114

§ I. — *Axes parallèles*..... 114

Engrenages cylindriques..... 114

Solution générale..... 115

Engrenages de roulement..... 116

§ II. — *Axes concourants*..... 118

Engrenages coniques..... 118

Solution générale..... 120

§ III. — *Axes non concourants*..... 120

Solution générale..... 120

Vis sans fin..... 122

Engrenages d'Olivier..... 124

CHAPITRE VIII. — TRAINS D'ENGRENAGES..... 126

§ I. — *Méthode exacte*..... 126

Généralités..... 126

Problème de Young..... 130

§ II. — *Méthode d'Huyghens*..... 133

Généralités..... 133

Rouage lunaire..... 135

Rouage solaire..... 138

§ III. — *Tables de M. Brocot*..... 140

Méthode..... 140

Rouage de Mercure..... 144

CHAPITRE IX. — ENGRENAGES ÉPICYCLOÏDAUX..... 146

§ I. — *Théorie générale*..... 146

Constitution des trains..... 146

Formules fondamentales..... 149

Décomposition des fractions..... 150

Méthode..... 150

Rouage sidéral..... 151

Pages.

§ II. — *Exemples* 153
Premier genre 153
Second genre 157
Troisième genre 160

CHAPITRE X. — ENGRENAGES IRRÉGULIERS 162

§ I. — *Variation continue* 162
§ II. — *Variation brusque* 166
§ III. — *Intermittence* 169
§ IV. — *Changement de sens* 171

CHAPITRE XI. — BIELLES 173

§ I. — *Théorèmes fondamentaux* 173
Généralités 173
Rapport de transmission 174
Combinaisons de mouvement 177
Points morts 182

§ II. — *Organes simples* 183
Bielles 183
Tiges 184
Manivelles 184
Balanciers 185

§ III. — *Transmissions* 186
Deux tiges 186
Deux manivelles 187
Deux balanciers 187
Tige et manivelle 189
Manivelle et balancier 189
Balancier et tige 190

CHAPITRE XII. — PARALLÉLOGRAMMES ET JOINTS 193

§ I. — *Parallélogramme de Watt* 193
Parallélogramme simple 193
Parallélogramme articulé 197

§ II. — *Joints* 199
Joint d'Oldham 200
Joint hollandais 200

Pages

CHAPITRE XIII. — CORDES..... 206

§ I. — *Généralités*..... 206

Généralités..... 206

Méthode générale..... 207

§ II. — *Poulies*..... 210

Poulies simples..... 210

Moufles..... 212

Trains de moufles..... 213

§ III. — *Tambours*..... 216

Généralités..... 216

Tambours fixes..... 219

Cordes fixes..... 219

§ IV. — *Courroies sans fin*..... 220

Transmission uniforme..... 220

Transmission variable..... 224

CHAPITRE XIV. — EMBRAYAGES..... 226

§ I. — *Embrayages rectilignes*..... 226

§ II. — *Embrayage par soulèvement*..... 232

§ III. — *Manchons d'embrayage*..... 240

§ IV. — *Courroies d'embrayage*..... 243

CHAPITRE XV. — DÉCLICS ET ENCLIQUETAGES..... 247

§ I. — *Déclanchements*..... 247

Arrêts..... 247

Déclanchements..... 247

§ II. — *Arbres à cames*..... 250

Deux translations..... 250

Translation et rotation..... 251

Deux rotations..... 252

§ III. — *Encliquetages*..... 252

CHAPITRE XVI. — RÉGULATEURS DE DESTRUCTION..... 257

§ I. — *Généralités*..... 257

§ II. — *Échappements*..... 259

§ III. — *Freins*..... 263

§ IV. — *Obturateurs*..... 264

§ V. — *Régulateurs aériens*..... 265

Pages.

CHAPITRE XVII. — RÉGULATEURS D'EMMAGASINEMENT..... 267

§ I. — *Croisement*..... 267

§ II. — *Fusées*..... 274

§ III. — *Volants*..... 280

Généralités..... 280
Manivelle simple à simple effet..... 282
Manivelles multiples..... 285
Méthode graphique..... 288

§ IV. — *Contre-poids*..... 289

§ V. — *Ressorts*..... 295

CHAPITRE XVIII. — MODÉRATEURS..... 297

§ I. — *Modérateurs à force centrifuge*..... 298

§ II. — *Modérateurs à ressort*..... 308

CHAPITRE XIX. — INDICATEURS CINÉMATIQUES..... 311

§ I. — *Compteurs*..... 311

Vitesses de rotation..... 312
Vitesses de projectiles..... 313
Vitesses de fluides..... 316

§ II. — *Enregistreurs*..... 318

Appareils à courbe..... 319
Enregistreurs optiques..... 323

CHAPITRE XX. — INDICATEURS DYNAMIQUES..... 326

§ I. — *Dynamomètres*..... 326

Dynamomètres à ressort..... 326

Organe sensible à la force..... 326
Organe sensible au déplacement..... 327
Organes de connexion..... 328
Exemples..... 329

Dynamomètre de frottement..... 330

§ II. — *Manomètres*..... 332

Manomètres hydrostatiques..... 332
Manomètres à contre-poids..... 334
Manomètres élastiques..... 336

Pages.

§ III. — *Balances*..... 337

Dynamomètres proprement dits..... 338
Balances proprement dites..... 339

SECONDE PARTIE.

THÉORIE DYNAMIQUE.

CHAPITRE XXI. — LOIS DU FROTTEMENT..... 345

§ I. — *Résistances passives*..... 345

§ II. — *Lois du frottement*..... 351

Historique..... 351
Fait principal..... 351
Lois du frottement..... 352

I. — Loi du mouvement relatif..... 352
II. — Loi de la pression normale..... 353
III. — Loi de la surface..... 353
IV. — Loi de la vitesse..... 354
V. — Loi de la substance..... 356

§ III. — *Formules générales du frottement*..... 358

CHAPITRE XXII. — FROTTEMENT DANS LES MACHINES..... 362

§ I. — *Glissières cylindriques*..... 362

Glissière de locomotive..... 362

§ II. — *Glissières de révolution*..... 365

Tourillon..... 366
Pivot..... 367

§ III. — *Glissières héliçoïdales*..... 369

Vis..... 369

§ IV. — *Engrenages*..... 371

Engrenage cylindrique..... 371
Crémaillère..... 375

Pages.

CHAPITRE XXIII. — PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DU FROTTEMENT. 376

§ I. — *Arc-boutement*..... 376

Généralités..... 376
Arc-boutement direct..... 378
Vis à filet carré..... 378
Coin..... 380
Valet..... 381
Tiges de bocard..... 382
Encliquetages Saladin..... 382
Encliquetage Dobo..... 384
Arcanseur-cale..... 385

§ II. — *Utilité du frottement*..... 385

Généralités..... 385
Locomotive..... 386
Freins..... 389

§ III. — *Mouvement louvoyant*..... 391

Généralités..... 391
Cônes de friction..... 392

§ IV. — *Graissage*..... 393

Généralités..... 393
Déversement..... 395
Système Decoster..... 395
Système Cail..... 395
Système Hermann..... 395
Système Farcot..... 395
Système Girard..... 396

CHAPITRE XXIV. — RÉSISTANCE AU ROULEMENT..... 397

§ I. — *Lois de la résistance au roulement*..... 397

§ II. — *Exemples*..... 399

Mise en mouvement..... 399
Rouleaux de transport..... 400
Arrêt spontané..... 402
Oscillation dans un angle dièdre..... 403
Oscillation dans un cylindre..... 408

Pages.

CHAPITRE XXV. — RÉSISTANCES DES CORDES..... 413

§ I. — *Lois du frottement des cordes*..... 413

§ II. — *Exemples*..... 417

Frein flexible..... 417
Courroie sans fin..... 419
Encliquetage Chameroy..... 421

§ III. — *Lois de la roideur des cordes*..... 424

§ IV. — *Exemples*..... 426

Poulie..... 426
Moufle..... 427
Train de moufles..... 429

CHAPITRE XXVI. — RÉSISTANCES DES FLUIDES..... 431

§ I. — *Lois du frottement des fluides*..... 431

§ II. — *Exemples*..... 435

Obturateurs..... 435
Projectiles..... 437

§ III. — *Lois de la résistance des milieux*..... 438

§ IV. — *Exemples*..... 445

Pendule hydraulique..... 445
Parachute..... 446
Criblage à la cuve..... 447

CHAPITRE XXVII. — RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX..... 450

§ I. — *Extension*..... 450

§ II. — *Flexion*..... 458

§ III. — *Exemples*..... 465

§ IV. — *Solides d'égale résistance*..... 471

§ V. — *Torsion*..... 475

§ VI. — *Pièces en mouvement*..... 481

PLANCHES I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X, XI, XII, XIII, XIV, XV, XVI.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

TABLE SYSTÉMATIQUE DES MÉCANISMES.

Transmissions.	Contact immédiat.	Roulement simple.	*Première classe.* — GALETS.
		Glissement simple.	*Deuxième classe.* — GLISSIÈRES.
		Mouvement mixte.	*Troisième classe.* — EXCENTRIQUES.
			Quatrième classe. — ENGRENAGES.
	Intermédiaire.	Solide.....	*Cinquième classe.* — BIELLES.
		Flexible...	*Sixième classe.* — CORDES.
Appareils accessoires			*Septième classe.* — EMBRAYAGES.
			Huitième classe. — RÉGULATEURS.
			Neuvième classe. — INDICATEURS.

PREMIÈRE CLASSE.

GALETS.

	Pages.	Figures.
PREMIÈRE CATÉGORIE. — GALETS DE TRANSMISSION UNIFORME	34	»
PREMIER GENRE. — *Galets fixes*.....	37	»
Suspension de la machine d'Atwood.....	37	71
Suspension des cloches.....	37	72
Galets d'alimentation.....	38	»
Galet totaliseur.....	38	73
Cône totaliseur.....	39	74
Fusée en tractrice.....	39	5
DEUXIÈME GENRE. — *Galets mobiles*.....	39	»
Roues à boudin.....	39	75
Système articulé de Sceaux.....	40	76

	Pages.	Figures.
TROISIÈME GENRE. — *Galets d'interposition*.....	41	»
Rouleaux de transport.....	36	60
Plaque tournante.....	41	77
Ponts tournants.....	42	»
Collier à galets.....	42	78
SECONDE CATÉGORIE. — GALETS DE TRANSMISSION VARIABLE.....	43	»
Spirale logarithmique et loxodromie.....	43	6, 7
Coniques planes et sphériques.....	46	8, 9, 10
Profils dérivés.....	49	11
Manivelle et tige uniformes.....	59	12

DEUXIÈME CLASSE.

GLISSIÈRES.

PREMIÈRE CATÉGORIE. — GLISSIÈRES CYLINDRIQUES.	64	»
Glissière de locomotives.....	66	79
Boîte à étoupes.....	67	80
Presse de relieur.....	67	81
DEUXIÈME CATÉGORIE. — GLISSIÈRES DE RÉVOLUTION.....	64	»
Palier.....	67	82
Crapaudine.....	67	83
Cheville ouvrière.....	68	»
Collier à étoupes.....	68	80
Articulation.....	68	84
Excentrique circulaire à collier.....	69	85
TROISIÈME CATÉGORIE. — GLISSIÈRES HÉLIÇOÏDALES.....	64	»
Écrou.....	69	»
Double vis des freins.....	69	»
Foret à vis.....	70	86
Vis différentielle de Prony.....	70	87
Tendeur d'attelage.....	70	88

TROISIÈME CLASSE.

EXCENTRIQUES.

	Pages.	Figures.
PREMIÈRE CATÉGORIE. — EXCENTRIQUES A RAINURE	71	»
PREMIER GENRE. — *Rainures rectilignes*	72	»
Renvoi de translation	72	89
Renvoi de rotation	72	90
Réglette de Nicomède	73	91
Machine oscillante de Cavé	73	92
Réglette de La Condamine	74	93
DEUXIÈME GENRE. — *Plateaux ou cônes à rainure*	75	94, 95
Rainure concentrique	76	»
Rainure en spirale d'Archimède	76	»
Rainure circulaire	77	»
TROISIÈME GENRE. — *Tiges à rainure*	77	96
Rainure circulaire	78	»
Rainure en 8	78	»
Rainure elliptique	79	17
Rainure rectiligne	79	98
QUATRIÈME GENRE. — *Cylindres à rainure*	80	97
Rainure circulaire	81	»
Rainure héliçoïdale	81	»
Rainure elliptique	81	»
DEUXIÈME CATÉGORIE. — EXCENTRIQUES A CADRE PERPENDICULAIRE	82	99
Excentrique à ondes	83	100
Came en cœur	83	99
Excentrique Morin	85	»
Excentrique Saulnier	87	101
Excentrique Meyer	87	102
TROISIÈME CATÉGORIE. — EXCENTRIQUES A CADRE CIRCONSCRIT	87	»
Excentrique circulaire à cadre	94	»
Excentrique triangulaire	94	103

QUATRIÈME CLASSE.

ENGRENAGES.

	Pages.	Figures.
PREMIÈRE CATÉGORIE. — Trains ordinaires.....	126	»
Premier genre. — *Axes parallèles*.....	96	»
Engrenage à lanterne.....	102	104
Engrenage à développantes.....	102	»
Engrenage épicycloïdal.....	103	»
Engrenage à flancs.....	103	»
Engrenage réciproque.....	104	»
Engrenage de la crémaillère.....	104	107
Engrenage de Willis.....	111	»
Engrenage cylindrique	114	106
Engrenage de White.....	117	108
Deuxième genre. — *Axes concourants*.....	118	»
Engrenage conique.....	118	109
Engrenage de roulement.....	120	»
Troisième genre. — *Axes non concourants*....	120	»
Engrenage hyperboloïde.....	121	»
Engrenage de la vis sans fin.....	122	»
Engrenage d'Olivier.....	124	»
Engrenage (second) d'Olivier.....	125	»
DEUXIÈME CATÉGORIE. — Trains épicycloïdaux..	146	»
Premier genre. — *Roues extrêmes indépendantes.*	153	»
Engrenage de Lahire.....	153	111
Plaque tournante.....	154	112
Compteur différentiel.....	154	113
Paradoxe de Ferguson.....	155	114
Mouche de Watt.....	156	115
Mouche de Saladin.....	156	116
Deuxième genre. — *Connexion avec une roue extrême*.....	157	»
Pignon valseur.....	157	117
Horloge lunaire de Mudge.....	158	118

	Pages.	Figures.
Train à potence	158	119
Train à huit roues (premier)	159	120
TROISIÈME GENRE. — *Connexion avec le levier*	160	»
Train à huit roues (second)	160	121
Horloge lunaire de Pecqueur	160	122
TROISIÈME CATÉGORIE. — TRAINS IRRÉGULIERS	162	»
PREMIER GENRE. — *Variation continue*	162	»
Roues de Rœmer	162	123
Rouage d'Huyghens	165	124
Rouage excentrique	165	125
DEUXIÈME GENRE. — *Variation brusque*	166	»
Roues complémentaires	166	126
Roues binaires	168	127
TROISIÈME GENRE. — *Intermittence*	169	»
Roues partielles	169	128
Compteurs décimaux	170	»
Arithmaurel	170	129
QUATRIÈME GENRE. — *Changement de sens*	171	»
Roue alternative	171	131
Lanterne oscillante	171	132
Double pignon oscillant	171	130
Crémaillère double	172	133
Crémaillère à pignon oscillant	172	134

CINQUIÈME CLASSE.

BIELLES.

Bielles	173	»
Bielle ordinaire	183	135
Bielle d'excentrique	183	136
Bielle fendue	183	137
Barres de renvoi	184	138
Maîtresses tiges	184	»
Tiges	184	»
Tige ordinaire	184	»
Tige Gorgone	184	»

	Pages.	Figures.
Manivelles	184	»
Manivelle ordinaire	184	139
Manivelle variable	184	140
Arbre coudé	185	141
Balanciers	185	»
Balancier ordinaire	185	142
Varlet	186	143
PREMIÈRE CATÉGORIE. — Deux tiges	186	»
Parallélogramme d'Evans	186	144
Losange articulé	186	145
Compas de menuisier	186	146
SECONDE CATÉGORIE. — Deux manivelles	187	»
Roues couplées	187	147
Roues à aubes parallèles	187	148
Joint d'Oldham	200	163
Joint hollandais	200	164
Joints multiples	203	»
Joint de Hooke	203	»
TROISIÈME CATÉGORIE. — Deux balanciers	187	»
Parallélogramme de Roberval	188	149
Parallélogramme de Reulaux	188	151
Pendule de White	188	150
Parallélogramme de Watt	193	161
Pantographe	198	162
Machine Collas	199	»
QUATRIÈME CATÉGORIE. — Tige et manivelle	189	»
Machine à connexion directe	189	152
Boîte à étoupes oscillante	189	153
Balancier de Cartwight	189	154
CINQUIÈME CATÉGORIE. — Manivelle et balancier.	189	»
Pédale du rémouleur	189	155
Machine de Watt	189	13, 156
SIXIÈME CATÉGORIE. — Balancier et tige	190	»
Bras de pompe	190	157, 158
Zigzag	191	159
Système de Sarrut	191	160

SIXIÈME CLASSE.

CORDES.

	Pages	Figures.
Cordes	206	»
Corde en chanvre	206	»
Corde en écorce	206	»
Câbles	206	»
Courroies	206	»
Sangle	206	»
Courroie de cuir	206	»
Câbles plats	206	»
Chaînes	206	»
Chaîne ordinaire	206	165
Chaîne de Vaucanson	206	166
Chaîne de Gall	206	167
PREMIÈRE CATÉGORIE. — Poulies	210	»
Poulie simple	210	168
Poulie mobile	211	170
Moufle ordinaire	213	171
Moufle de White	213	172
Moufle plate	213	173
Trains de moufles	213	174
SECONDE CATÉGORIE. — Tambours	216	»
Treuil	216	»
Cabestan	216	»
Fusée	216	»
Bobine	216	»
Treuil différentiel	216	175
Double treuil cannelé	218	177
Premier genre. — *Tambour fixe*	219	»
Balancier à lanières	219	178
Archet à forer	219	179
Drille	219	180

	Pages.	Figures.
SECOND GENRE. — *Corde fixe*.....	219	»
Chariot des mull-jenny.....	219	181
Remorqueur fixe.....	219	»
Remorqueur à chaîne.....	220	»
TROISIÈME CATÉGORIE. — CORDES SANS FIN.....	220	»
PREMIER GENRE. — *Transmission uniforme*.....	220	»
Courroies extérieures.....	221	182
Courroies intérieures.....	221	183
Courroies gauches.....	222	184
Palan différentiel de Wilson.....	217	»
SECOND GENRE. — *Transmission variable*.....	224	»
Rouleau tenseur.....	224	185
Fusées complémentaires.....	224	186

SEPTIÈME CLASSE.

EMBRAYAGES.

PREMIÈRE CATÉGORIE. — EMBRAYAGES.....	226	»
PREMIER GENRE. — *Embrayage rectiligne*.....	226	»
Barres d'excentrique.....	227	187
Coulisse de Stephenson.....	228	188, 189
DEUXIÈME GENRE. — *Embrayage par soulèvement*.	232	»
Palier à soulèvement.....	232	190
Trains complémentaires.....	232	48
Trains non complémentaires.....	234	191
Trains multiples.....	235	»
TROISIÈME GENRE. — *Manchons d'embrayage*...	240	»
Manchons.....	241	»
Manchon à griffes droites.....	241	192
Manchon à griffes obliques.....	241	193
Cônes de friction.....	241	194
Débrayages.....	241	»
Pince d'embrayage.....	241	195
Débrayage à vis.....	242	»
Débrayage brusque.....	242	196
Débrayage automoteur.....	242	197

	Pages.	Figures.
Changements de marche	242	»
Mise en marche	242	»
Variation de vitesse	242	198
Changement de sens	243	199
QUATRIÈME GENRE. — *Courroies d'embrayage*	243	»
Courroies lâches	243	»
Axe à soulèvement	243	200
Tire-sac	243	201
Poulies à expansion	244	202
Treuil en spirale	244	203
Fourche d'embrayage	244	204
Mise en marche	244	»
Arbres creux	245	206
Fusées complémentaires	245	207
Cônes complémentaires	246	»
Changement de sens	245	205
SECONDE CATÉGORIE. — DÉCLICS	247	»
PREMIER GENRE. — *Déclanchements*	247	»
Came de Farcot	248	208
Liseuse Jacquart	248	»
Déclic à bascule	248	209
Déclic de la cataracte	249	210
Sonnette du mouton	249	211
Parachute Fontaine	250	212
SECOND GENRE. — *Arbres à cames*	250	»
Coin de soulèvement	250	»
Crémaillère à rochet	250	213
Pilons de bocard	251	»
Marteaux de forge	252	»
Cisaille à excentrique	252	36
TROISIÈME CATÉGORIE. — ENCLIQUETAGES	252	»
PREMIER GENRE. — *Encliquetages à rochet*	253	»
Clef Bréguet	254	214
Levier d'encliquetage	254	215
Remontage des chronomètres	254	216

	Pages.	Figures.
Encliquetage muet	255	217
Levier de La Garousse	255	218
Crémaillère à rochet	256	219
SECOND GENRE. — *Encliquetage d'arc-boutement.*	376	»
Vis de serrage	378	»
Coin de serrage	380	»
Valet de menuisier	381	256
Encliquetage Saladin à simple effet	382	257
Encliquetage Saladin à double effet	383	258
Encliquetage Dobo	384	259
Arcanseur-cale	385	260
Encliquetage Chameroy	421	262

HUITIÈME CLASSE.

RÉGULATEURS.

PREMIÈRE CATÉGORIE. — RÉGULATEURS DE DESTRUCTION	257	»
PREMIER GENRE. — *Échappements*	259	»
Échappement à ancre	260	220
Échappement à cylindre	261	221, 222
Échappement à chevilles	261	223
Échappement libre	262	224
DEUXIÈME GENRE. — *Freins*	263	»
Sabot	263	225
Frein Laignel	263	226
Frein flexible	263	227
Manivelle des voitures	263	228
Frein de chemin de fer	263	229
TROISIÈME GENRE. — *Obturateurs*	264	»
Cône obturateur	264	»
Cataracte	264	»
Lampe modérateur	264	230
Atmospheric clock	265	»
QUATRIÈME GENRE. — *Régulateurs aériens*	265	»
Parachute	265	»
Volant à ailettes	266	»

	Pages	Figures.
SECONDE CATÉGORIE. — Régulateurs d'emmagasinement	267	»
Premier genre. — *Organes croisés*	267	»
Manivelles multiples	267	»
Deuxième genre. — *Variation du bras de levier.*	274	»
Fusées d'horlogerie	275	»
Tambour conique d'extraction	275	»
Bobines d'extraction	275	»
Troisième genre. — *Volants*	286	»
Volant à boules	280	»
Volant annulaire	280	»
Quatrième genre. — *Contre-poids*	289	»
Contre-poids des manivelles	289	»
Contre-poids de M. Laboulaye	290	»
Pont-levis à flèche	291	231
Pont-levis de Bélidor	292	232
Câbles de contre-poids de mines	294	233
Câbles de contre-poids de gazomètres	294	»
Cinquième genre. — *Ressorts*	295	»
Ressorts solides	295	»
Cloches à air	295	»
TROISIÈME CATÉGORIE. — *Modérateurs*	297	»
Premier genre. — *Modérateurs à force centrifuge*	298	»
Modérateur à boules	299	234
Modérateur Franke	303	235
Modérateur Farcot	303	236
Modérateur Foucault	303	»
Modérateur Flaud	305	237
Modérateur Duvoir	307	238
Second genre. — *Modérateurs à ressort*	308	»
Modérateur Poncelet	308	239
Modérateur Larivière	308	240
Modérateur Molinié	309	»
Modérateur hydraulique	309	241

NEUVIÈME CLASSE.

INDICATEURS.

	Pages.	Figures.
PREMIÈRE CATÉGORIE. — COMPTEURS.....	311	»
PREMIER GENRE. — *Vitesses de rotation*.....	312	»
Compteur décimal.....	312	»
Gyromètre de Fabre	312	»
DEUXIÈME GENRE. — *Vitesses de projectiles*.....	313	»
Tambour Mattei.....	313	»
Pendule balistique.....	313	242
Pendule électro-balistique.....	314	»
TROISIÈME GENRE. — *Vitesses de fluides*.....	316	»
Tube de Pitot.....	316	243
Sympiézomètre de Darcy.....	316	244
Pendule hydraulique.....	317	»
Moulinet de Woltmann..... ..	317	»
Anémomètre.....	318	»
Lochomètre.....	318	»
SECONDE CATÉGORIE. — ENREGISTREURS.....	318	»
PREMIER GENRE. — ENREGISTREURS A COURBE...	319	»
Sphygmographe.....	320	»
Appareil de M. Morin, à cylindre.....	321	»
Appareil d'Eytelwein.....	321	245
Appareil de M. Morin, à disque.....	322	246
Tachomètre.....	323	»
SECOND GENRE. — *Enregistreurs optiques*.....	323	»
Kaléidophone de Wheatstone.....	323	»
Appareil de M. Lissajoux.....	324	»
TROISIÈME CATÉGORIE. — DYNAMOMÈTRES.....	326	»
PREMIER GENRE. — *Dynamomètres à ressort*....	326	»
Dynamomètre de traction.....	329	247
Manivelle dynamométrique.....	329	248
Dynamomètre de rotation.....	329	249
Indicateur de Watt.....	329	250
Indicateur de Clair.....	330	251

	Pages.	Figures.
SECOND GENRE. — DYNAMOMÈTRE DE FROTTEMENT.	330	»
Frein de Prony	330	252
QUATRIÈME CATÉGORIE. — MANOMÈTRES	332	»
PREMIER GENRE. — *Manomètres hydrostatiques*.	332	»
Manomètre à air libre	333	»
Manomètre Richard	333	»
Manomètre Galy-Cazalat	333	»
SECOND GENRE. — *Manomètres à contre-poids*	334	»
Manomètre Desbordes	334	»
Manomètre Rivals	334	»
Manomètre Giroud	335	»
TROISIÈME GENRE. — *Manomètres à ressort*	336	»
Manomètre Meyer	336	»
Manomètres Charton, Clair, etc	336	»
Manomètre Bourdon	336	253
Manomètre Bossuet	337	»
CINQUIÈME CATÉGORIE. — BALANCES	337	»
PREMIER GENRE. — *Dynamomètres* (proprement dits)	338	»
Dynamomètre de Regnier	338	»
Manivelle dynamométrique	338	»
Pèse-lettres	338	»
SECOND GENRE. — *Balances* (proprement dites).	339	»
Poids constant	340	»
Romaine	340	»
Romaine double	340	»
Peson	340	»
Dynamomètre américain	341	»
Boîte à poids	341	»
Balance ordinaire	341	»
Balance de Roberval	342	149
Balance de Quintenz	342	254
Balance de Sanctorius	343	255

FIN DE LA TABLE SYSTÉMATIQUE DES MÉCANISMES.

TRAITÉ
DES MÉCANISMES.

INTRODUCTION.

CINÉMATIQUE.

DÉFINITIONS.

I. La *Cinématique* est l'étude du mouvement faite au point de vue géométrique, c'est-à-dire en ne joignant à la notion de l'espace que celle du temps.

Le *mouvement* est le phénomène qui se produit lorsqu'un corps n'occupe pas constamment la même position dans l'espace. Le *repos* est le phénomène opposé.

Pour constater l'état de repos ou de mouvement d'un corps, on se sert de points de comparaison ou de *repères* qui soient eux-mêmes au repos : par exemple, un système d'axes coordonnés. La permanence ou la variation des coordonnées des différentes parties du corps en indiqueront le repos ou le mouvement.

Concevons qu'on relève ainsi à chaque instant les coordonnées du mobile par rapport à des axes animés eux-mêmes d'un *mouvement d'entraînement;* imaginons en outre un corps identique, avec d'autres axes fixes, et rapportons-leleur à chaque instant d'après les coordonnées observées : le mouvement de ce mobile auxiliaire constituera le *mouvement relatif* du corps proposé par rapport aux axes mobiles.

La notion du mouvement relatif correspond à la sensation du *mouvement apparent* qu'éprouve un observateur lorsqu'il participe, à son insu, à l'entraînement du système de repères employé, qu'il considère, par erreur, comme fixe.

La considération du mouvement relatif présente en outre un grand intérêt, en permettant les compositions ou décompositions de mouvement. Il est clair, en effet, que, si l'on fait connaître à la fois le mouvement d'entraînement et le mouvement relatif, il sera possible d'en déduire le *mouvement absolu* du corps; car la connaissance du premier permet à chaque instant d'installer les axes mobiles dans la position qu'ils doivent occuper, et celle du second nous met en état de leur rapporter le corps mobile. L'opération qui déduit ainsi le mouvement absolu des mouvements d'entraînement et relatif est la *composition* des mouvements.

Le problème inverse est la *décomposition*. Il consiste à trouver deux mouvements tels, qu'en leur faisant subir l'opération précédente on obtienne un mouvement proposé.

MOUVEMENT D'UN POINT.

II. Pour simplifier l'étude du mouvement, nous réduirons d'abord le mobile à un point géométrique. La série de ses positions forme une ligne que l'on appelle sa *trajectoire*, et que nous supposerons quelconque.

De tous les mouvements d'un point, le plus simple est celui dans lequel le mobile parcourt des espaces égaux dans des temps égaux, ou dans lequel l'espace varie proportionnellement au temps. On l'appelle *mouvement uniforme*. Si nous désignons par s l'arc de la trajectoire, compté à partir du point où se trouve le mobile lorsque l'on commence à évaluer le temps; si nous représentons de même ce dernier

par t et par v une constante, le mouvement uniforme sera représenté par l'équation

$$s = vt.$$

La constante v, qui mesure le degré de rapidité avec laquelle le mobile passe d'une position à une autre, est appelée la *vitesse*. On peut, d'après l'équation, la définir : le rapport de l'espace parcouru au temps employé à le parcourir, ou, plus simplement, l'espace décrit dans l'unité de temps.

Tout mouvement qui n'est pas uniforme est dit *varié*. Pour s'en faire une idée nette, on le compare à chaque instant à un mouvement uniforme qui aurait pour effet de déplacer le mobile de la même quantité dans un temps infiniment petit. Si dt désigne cette durée et ds l'espace parcouru, la vitesse de ce mouvement uniforme sera, d'après ce que nous venons de dire,

$$v = \frac{ds}{dt}.$$

Elle servira de mesure au degré de rapidité du mouvement varié à chaque instant.

On emploie, pour désigner la vitesse, une *droite représentative*. On l'estime à partir du mobile lui-même. On la porte dans la direction du mouvement, c'est-à-dire sur la tangente à la trajectoire et dans le sens où s'opère le déplacement; enfin on lui donne une longueur égale à celle de la vitesse elle-même, ou réduite dans un rapport convenu.

III. *Parallélogramme des vitesses.* — Résolvons, pour le mouvement d'un point, le problème de la composition des vitesses, en supposant connues les vitesses relative et d'entraînement, et cherchant la vitesse absolue.

J'imagine, pour cela, que l'on ait tracé dans le système

d'axes mobiles la trajectoire relative, et qu'elle occupe aux instants initial et final les positions MR, M_1R_1 (*Pl. I, fig.* 1). Sur cette trajectoire, le mobile se trouve aux mêmes instants en deux points, que je représente sur la première des deux courbes par M et M'. Ces points sont emportés par le mouvement d'entraînement suivant deux lignes ME, M'E', et on les retrouve à l'instant final sur la seconde trajectoire M_1R_1 en M_1 et M'_1. Les deux positions du mobile seront donc M et M'_1, et la trajectoire absolue une certaine courbe MA qui passe par ces points.

Dans le quadrilatère $MM'M_1M'_1$, les deux côtés opposés MM' et $M_1M'_1$ sont égaux, car ce sont deux positions d'une même ligne. Ils sont de plus parallèles; car, si l'orientation de cette ligne a varié, ce ne peut être qu'infiniment peu et d'une quantité négligeable vis-à-vis des angles finis de la figure. Ce quadrilatère est donc un parallélogramme.

D'ailleurs, les directions des éléments MM', MM_1 et MM'_1 sont celles de leurs tangentes ou des trois vitesses relative, d'entraînement et absolue. Quant aux valeurs de ces vitesses, ce sont les quotients des éléments par le temps. La figure $MN'NN_1$, que forment les droites représentatives des vitesses, est donc semblable à la précédente et semblablement placée. Elle sera par suite elle-même un parallélogramme.

Tel est le théorème du *parallélogramme des vitesses*. On l'énonce en disant que *la vitesse absolue est la diagonale du parallélogramme construit sur les vitesses relative et d'entraînement*. A ce titre, la première est dite la *vitesse résultante*, les deux autres formant ses *composantes*.

MOUVEMENTS SIMPLES DES SOLIDES.

IV. Lorsque d'un point mobile nous passons à la considération d'un système solide invariable, la question revient

à étudier le mouvement de ses divers points; mais il suffit, pour cela, d'en envisager un très-petit nombre.

Si nous imaginons, en effet, sur le solide un premier *repère* A, arbitraire mais déterminé, nous pourrons le placer à volonté dans l'espace. Un second repère B ne pourra plus alors se trouver que sur une sphère décrite autour de A avec un rayon égal à la distance invariable qui sépare ces points. Un troisième repère C ne pourra également être situé que sur deux pareilles sphères décrites autour de A et de B, c'est-à-dire sur un cercle dont le plan sera perpendiculaire à AB et le centre situé sur cette droite. Enfin, un quatrième point quelconque sera complétement déterminé par l'intersection de trois sphères décrites autour de A, B, C (1). Ces trois repères tiennent donc lieu de tout le reste du système, dont ils déterminent la position, et nous pouvons ainsi réduire par la pensée un solide quelconque au *triangle des repères* ABC.

La théorie du mouvement des solides consiste dans l'assimilation que nous chercherons à établir entre un mouvement quelconque et quelques types simples et peu nombreux avec lesquels il importe tout d'abord de se bien familiariser. On les appelle *mouvements simples*, et ils sont au nombre de trois : la translation, la rotation, le mouvement héliçoïdal.

V. *Translation.* — On dit que le mouvement est de *translation* lorsque les côtés du triangle des repères restent toujours parallèles à eux-mêmes.

Dans une translation, toute droite reste parallèle à elle-même. Car elle se détermine d'après le triangle des

(1) Il y a à la vérité deux points déterminés par cette intersection, mais les tétraèdres qui les relient à ABC ne sont pas superposables, ils sont seulement symétriques. Comme d'ailleurs la forme de ce tétraèdre est donnée par la constitution invariable du système, le doute n'est pas possible.

repères par un système d'angles invariable, et l'orientation de ce triangle reste elle-même constante.

Dans une translation, tous les déplacements élémentaires simultanés sont égaux et parallèles. En effet, les deux positions d'une droite étant égales et parallèles, le quadrilatère formé par leurs quatre extrémités est un parallélogramme, et ses deux autres côtés, c'est-à-dire les déplacements des extrémités, sont égaux et parallèles.

Dans une translation, toutes les vitesses simultanées sont égales et parallèles. Car leurs directions sont celles des déplacements, et l'on obtient leurs valeurs en divisant par le temps ces déplacements eux-mêmes.

Dans une translation, toutes les trajectoires sont égales et situées parallèlement. En effet, deux quelconques d'entre elles sont formées d'éléments respectivement égaux et parallèles.

On voit, d'après cela, que le mouvement de translation est identique pour tous les points. On le désigne à chaque instant par sa vitesse. C'est sa droite représentative qui peut être appliquée à un point quelconque.

VI. *Rotation.* — On dit que le mouvement est de *rotation* lorsque deux des repères sont fixes. La droite qui les joint s'appelle l'*axe* de la rotation. Il est clair que tous ses points sont également fixes. Le plan mené par l'axe et par un point quelconque est le *méridien* de ce point, et la perpendiculaire abaissée de ce point sur l'axe en est le *rayon*.

Dans une rotation, tous les points décrivent des cercles dont les plans sont perpendiculaires à l'axe et les centres situés sur cet axe. En effet, un point quelconque du solide peut être envisagé comme le troisième repère, et, à ce titre, ne peut se trouver que sur un pareil cercle (IV).

Dans une rotation, tous les méridiens tournent à la fois

du même angle. Si, en effet, deux méridiens, que je désignerai par OM et ON, viennent en OM′ et ON′, leur angle a dû se conserver, et, par suite,

$$\text{MON} = \text{M′ON′}.$$

Si donc on ajoute ou l'on retranche de part et d'autre, suivant les cas, M′ON, il viendra

$$\text{MOM′} = \text{NON′},$$

c'est-à-dire l'égalité des angles décrits.

Dans une rotation, tous les déplacements simultanés sont proportionnels aux rayons. Car ce sont des arcs de cercle qui ont le même angle au centre. Si donc s désigne l'espace, r le rayon et θ l'angle décrit,

$$s = \theta r.$$

Dans une rotation, toutes les vitesses simultanées sont perpendiculaires à leurs méridiens et proportionnelles à leurs rayons. En effet, pour ce qui concerne la direction, chacune d'elles est tangente au cercle, c'est-à-dire perpendiculaire au rayon et, par suite, au méridien qui est élevé perpendiculairement au plan du cercle suivant ce rayon. Quant à la valeur, on a, en différentiant l'équation précédente dans laquelle r reste constant,

$$\frac{ds}{dt} = r\frac{d\theta}{dt},$$

c'est-à-dire

$$v = \omega r,$$

en posant

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}.$$

La quantité ω s'appelle la *vitesse angulaire* de la rotation. On peut la définir : la vitesse des points situés à l'unité de distance de l'axe.

Pour désigner complétement une rotation à chaque in-

stant, on emploie encore une droite représentative. On la compte suivant l'axe à partir d'un quelconque de ses points. On lui donne pour longueur celle de la vitesse angulaire, réduite, si l'on veut, dans un rapport de convention. Enfin on la porte dans un tel sens, qu'en regardant de ce côté la rotation apparaisse comme celle des aiguilles d'une horloge.

VII. *Mouvement héliçoïdal.* — Le *mouvement héliçoïdal* est le résultat de la composition d'une rotation uniforme autour d'un axe, et d'une translation rectiligne et uniforme parallèle à cet axe.

La vitesse de chaque point s'obtiendra par la construction du parallélogramme (III), qui sera dans le cas actuel un rectangle, car la vitesse de translation est parallèle à l'axe et celle de rotation lui est perpendiculaire (VI). Ces deux vitesses étant constantes, il en sera de même de la vitesse absolue et de son inclinaison. Comme, du reste, aucun des deux mouvements composants n'altère les distances d'un point quelconque à l'axe, ce point restera sur un cylindre de révolution. Sa trajectoire sera donc la ligne qui traverse sous un angle constant toutes les génératrices d'un pareil cylindre, c'est-à-dire une hélice.

Le pas de ces hélices est en outre constant. C'est, en effet, la quantité dont varie pendant un tour la distance de chaque point à un plan perpendiculaire à l'axe. Or la rotation n'altère pas ces distances. Leur modification est donc due exclusivement à la translation, et par suite elle est la même pour tous les points.

En résumé, *dans le mouvement héliçoïdal, tous les points décrivent des hélices de même axe et de même pas.*

J'ai supposé, pour plus de clarté, les deux mouvements composants uniformes. On peut les faire varier suivant une loi quelconque, pourvu que le rapport de la vitesse

de translation et de la vitesse angulaire reste constant. A la vérité, le rectangle des vitesses d'un point ne sera plus le même à chaque instant, mais il restera semblable à lui-même, et, par suite, l'inclinaison de la vitesse absolue demeurera constante, ce qui est la propriété fondamentale dont nous avons déduit les autres.

MOUVEMENT PLAN.

VIII. Pour étudier le mouvement quelconque d'un solide, commençons par réduire les difficultés de la question à celles de la Géométrie à deux dimensions, en envisageant le mouvement d'une figure plane dans son propre plan. Deux repères suffiront alors, car un troisième point quelconque se trouvera déterminé par ses distances aux deux premiers. Nous pouvons ainsi réduire à une simple droite la figure mobile.

Un déplacement plan quelconque peut toujours être effectué par une rotation autour d'un point du plan.

Si on envisage, en effet (*Pl. I, fig.* 2), la rencontre des deux positions xy, $x'y'$ de la droite, on y trouvera un point double, à savoir : un point B de la première droite xy, qui se trouvera en B′ après le déplacement, et un point A′ de la seconde $x'y'$, qui était au commencement en A ; on a d'après cela $AB = A'B'$. Élevons sur les milieux de ces droites les perpendiculaires MO, M′O. Les triangles rectangles OMB, OM′B seront égaux, comme ayant même hypoténuse OB, et les côtés égaux $MB = M'B$. On en déduit $OM = OM'$. Si donc on opère autour du point O une rotation de l'angle MOM′, le point M décrivant un cercle viendra en M′, et la droite qui reste perpendiculaire à l'extrémité de ce rayon se trouvera amenée en $x'y'$.

Lorsqu'il s'agit d'un déplacement infiniment petit, toutes les manières de l'effectuer peuvent être assimilées l'une

à l'autre, car les arcs de toutes les trajectoires qui peuvent amener chacun des points à sa destination peuvent être confondus avec leur corde commune, à savoir : la droite qui joint les positions initiale et finale du point. Et comme nous venons de découvrir une manière, entre autres, d'effectuer ce déplacement, nous pourrons dire que *tout mouvement plan élémentaire est une rotation instantanée autour d'un* CENTRE INSTANTANÉ.

Nous pouvons par là étendre à un mouvement plan quelconque à chaque instant les propriétés démontrées pour la rotation, notamment les deux suivantes : *Dans un mouvement plan quelconque toutes les normales des trajectoires simultanées concourent au centre instantané, et toutes les vitesses sont proportionnelles à ces normales.*

Si donc *on veut avoir la normale d'un point quelconque, il suffit de le joindre au centre instantané.*

De même, *si on veut connaître le point où une courbe quelconque de la figure touche l'enveloppe de toutes ses positions, il suffit d'y projeter normalement le centre instantané.* En effet, le point ainsi obtenu sera l'intersection de deux enveloppées consécutives. Car si on imagine sa seconde position, elle sera, bien entendu, sur la seconde enveloppée; et l'on peut aussi la considérer comme située sur la première, puisque la direction de son mouvement est perpendiculaire au rayon instantané, c'est-à-dire tangente à la courbe.

IX. Le mouvement continu, pouvant être subdivisé en mouvements infiniment petits, sera une succession de rotations élémentaires autour de centres instantanés qui varieront à chaque instant, et dont la série formera dans l'espace absolu une certaine courbe. Je l'envisage comme un polygone infinitésimal $OO_1O_2O_3\ldots$ (*Pl. I, fig.* 3). J'en construis un autre $OO'O''O'''\ldots$ dont les côtés soient respectivement

égaux à ceux du précédent, et qui ait à chacun de ses sommets pour angle de contingence compté à l'extérieur $O^{n-1}O^nO^{n+1}$ la somme de l'angle intérieur $O_{n-1}O_nO_{n+1}$ du précédent et de la rotation élémentaire α_n qui s'effectue autour du centre O_n. Il est clair que dans ces conditions la succession des rotations amènera chacun des sommets du second polygone à coïncider avec ceux du premier, et que ces deux lignes brisées rouleront sans glisser l'une sur l'autre par application d'arcs égaux. On reconnaît en même temps que les sommets du second polygone sont les points de la figure qui deviennent successivement centres instantanés. Ainsi donc, *un mouvement plan quelconque peut être reproduit par le roulement sans glissement de deux courbes planes qui sont les lieux géométriques du centre instantané dans l'espace absolu et dans la figure mobile* (1).

MOUVEMENT D'UN SOLIDE.

X. *Mouvement sphérique.* — La sphère, comme le plan, est une surface identique dans toutes ses parties. On peut donc envisager le déplacement d'une figure sphérique sur sa propre sphère. En reproduisant des raisonnements identiques aux précédents, avec la seule précaution d'y remplacer les droites par des arcs de grand cercle, on arrivera aux deux théorèmes suivants :

Tout mouvement sphérique élémentaire est une rotation instantanée autour d'un PÔLE INSTANTANÉ.

Tout mouvement sphérique continu peut être reproduit par le roulement sans glissement de deux courbes sphériques qui sont les lieux géométriques du pôle instantané dans l'espace absolu et dans la figure mobile.

---

(1) On trouvera plus loin (155, 169, 189) des exemples remarquables de ce mode de représentation.

XI. *Pivotement.* — On appelle *pivotement* le mouvement d'un solide dont un repère reste fixe. Ce point est le *centre* du pivotement. Tous les autres décriront autour de lui des courbes sphériques; car un point quelconque du solide peut être envisagé comme le second repère, et à ce titre ne peut se trouver que sur une sphère (IV) décrite autour du premier. Si donc on coupe le solide par une sphère concentrique, la figure d'intersection ne sortira pas de sa propre sphère. Or, elle commande le mouvement du corps, puisqu'on y peut choisir les trois repères. Le pivotement peut donc être assimilé à un mouvement sphérique, et, à ce titre, il jouit des deux propriétés que nous venons d'établir. Comme d'ailleurs le centre est sans vitesse, ainsi que le pôle instantané, on a dans le solide deux points sans vitesse, c'est-à-dire un axe instantané.

Donc, *tout pivotement élémentaire est une rotation instantanée autour d'un* AXE INSTANTANÉ *qui passe par le centre de pivotement.*

En second lieu, la série des axes qui passent tous par le centre dessine un cône, ou mieux deux cônes, l'un dans l'espace absolu et l'autre formé par les droites du corps qui deviennent successivement axes instantanés. Ces cônes auront toujours même sommet au centre de pivotement, et comme il y a roulement entre leurs directrices sphériques (X), il y aura de même roulement entre les deux surfaces. Donc, *tout pivotement continu peut être reproduit par le roulement sans glissement de deux cônes qui sont les lieux géométriques de l'axe instantané dans l'espace absolu et dans la figure mobile.*

XII. *Mouvement général.* — Prenons sur le solide un repère A, et imprimons à tout le corps une translation rectiligne suivant la droite AA′ qui amène ce point à sa destination. Pour faire parvenir le solide à sa position définitive,

il reste à lui attribuer un dernier mouvement dans lequel ce repère restera fixe, c'est-à-dire un pivotement ou, d'après ce qui vient d'être démontré (XI), une rotation. L'axe de cette rotation passe par le centre de pivotement ou par la seconde position du repère. Mais lorsque nous nous bornerons à considérer un déplacement élémentaire, cette position pourra être confondue avec la première, car elle en est infiniment rapprochée. Ainsi donc, *tout mouvement élémentaire peut être considéré d'une infinité de manières comme composé d'une translation avec la vitesse d'un point arbitraire et d'une rotation autour d'un axe passant par ce point.*

XIII. Parmi cette infinité de décompositions, il en est une plus simple que les autres qui mérite de fixer l'attention.

Décomposons, comme nous venons de le faire, le mouvement élémentaire en une translation et une rotation autour d'un certain axe. J'imagine ensuite un plan perpendiculaire à cet axe et la section qu'il détermine dans le solide. Ce plan reste parallèle à lui-même, car aucun des deux mouvements ne change sa direction. On peut donc l'amener de la première à la seconde position par une translation parallèle à l'axe. Mais si l'on a placé ainsi dans sa situation finale le plan indéfini, il n'en est pas de même de la figure plane qui y est tracée. Pour amener cette figure à sa destination, il reste à opérer un déplacement qui ne la fera pas sortir de son plan. Or, nous savons (VIII) que ce genre de mouvement est une rotation instantanée autour d'un certain axe perpendiculaire au plan, c'est-à-dire parallèle au premier ou à la translation effectuée. Ainsi donc, *tout mouvement élémentaire peut être considéré comme composé d'une rotation autour d'un certain axe et d'une translation parallèle à cet axe.* En d'autres termes, *tout mouvement élémentaire est un mouvement héliçoïdal instan-*

tané (VII). L'axe de ce mouvement héliçoïdal est appelé *axe spontané.*

Si nous envisageons maintenant le mouvement continu comme une succession de mouvements héliçoïdaux dont l'axe et le pas varient continuellement, nous reconnaîtrons, en reproduisant le raisonnement qui nous a déjà servi, que *tout mouvement continu peut être reproduit par le roulement mixte de deux surfaces réglées l'une sur l'autre; ces deux surfaces réglées étant les lieux géométriques de l'axe spontané dans l'espace absolu et dans la figure mobile, et la surface mobile roulant à chaque instant autour de la génératrice commune, en même temps qu'elle glisse latéralement le long de cette génératrice.*

COMPOSITION DES MOUVEMENTS.

XIV. Le problème de la composition des mouvements se ramènera toujours à la réduction de deux mouvements en un seul, car s'il s'en présente un plus grand nombre on n'aura qu'à répéter plusieurs fois de suite la même opération. Mais il sera en même temps nécessaire de distinguer tous les cas qui peuvent se présenter, ce que je vais faire au moyen d'un petit nombre de règles distinctes.

Deux translations. — Si nous effectuons sur chaque point la composition de ses deux vitesses, comme elles sont les mêmes pour tous les points dans une translation, le parallélogramme des vitesses (III) sera identique pour tous, il en sera de même de la vitesse résultante, et, par suite, le mouvement résultant sera lui-même une translation. Donc *les translations se composent par parallélogramme.*

XV. *Deux rotations d'axes concourants.* — Lorsque les axes de deux rotations se rencontrent en un point, celui-ci ne reçoit de vitesse ni de l'une ni de l'autre. Sa vitesse

absolue est donc nulle, et le mouvement résultant est un pivotement, c'est-à-dire (XI) une rotation instantanée dont l'axe passe par le point de concours.

Nous pouvons reconnaître en outre qu'il se trouve dans le plan des deux premiers. En effet, chacun de ses points a une vitesse résultante nulle, c'est-à-dire deux vitesses composantes égales et directement opposées. Or, les vitesses de rotation sont perpendiculaires au méridien (VI), donc ce méridien doit être le même pour les deux axes, c'est-à-dire se confondre avec leur plan.

Si maintenant nous élevons, par le point de concours des trois axes, une perpendiculaire égale à l'unité, son extrémité se trouve à la fois à l'unité de distance de chacun des trois axes. Ses trois vitesses mesureront donc les vitesses angulaires des trois mouvements (VI), c'est-à-dire les longueurs des droites représentatives de ces rotations. Elles sont d'ailleurs perpendiculaires à leurs méridiens respectifs qui passent tous les trois par la perpendiculaire de construction. Ces vitesses sont par suite situées dans un plan parallèle à celui des axes, et perpendiculaires chacune à l'axe ou à la droite représentative correspondants. Les deux figures formées par ces droites et par les trois vitesses sont ainsi les mêmes, à cela près qu'elles se trouvent disposées à angle droit l'une sur l'autre. Mais on sait que les vitesses forment un parallélogramme (III), il en est par suite de même des droites représentatives.

Ainsi donc, *les rotations autour d'axes concourants se composent par parallélogramme.*

XVI. *Deux rotations d'axes parallèles.* — Supposons que le point de concours s'éloigne indéfiniment, les axes restant assujettis à passer par deux points fixes. L'angle diminue peu à peu et le parallélogramme s'aplatit de plus en plus. Sa diagonale devient donc à la limite la somme

ou la différence des côtés, suivant que les rotations sont alors de même sens ou de sens opposés.

La direction de cette diagonale, étant intermédiaire entre les deux proposées, se confond avec la direction commune des axes devenus parallèles.

Elle ne cesse pas d'ailleurs d'être comprise dans leur plan, de sorte qu'il ne reste plus qu'à y déterminer sa distance à chacun des deux axes.

Or, on connaît par la Géométrie cette propriété du parallélogramme, que les distances de l'extrémité de la diagonale aux deux côtés sont en raison inverse de ces côtés (1). Ce rapport subsistant encore à la limite, il suffit de trouver sur une perpendiculaire aux deux axes un point dont les distances à ces derniers soient dans le rapport inverse des vitesses angulaires. On sait encore que ce problème comporte deux solutions dont l'une se trouve comprise entre les axes et l'autre en dehors de leur intervalle, du côté de la plus grande vitesse. C'est le sens respectif des deux rotations qui fixera le choix de ce point. Il faut en effet, pour qu'il ait une vitesse nulle, que ses deux vitesses composantes soient de sens opposés, et l'on s'assure facilement qu'il en est ainsi dans l'intervalle des deux axes si les rotations sont de même sens, et à l'extérieur si elles sont de sens opposés.

En résumant ces différents résultats, nous voyons que *deux rotations autour d'axes parallèles se composent en une seule dont l'axe est parallèle aux deux premiers, situé dans leur plan et à des distances réciproquement proportionnelles à leurs vitesses angulaires. En outre, suivant que les deux rotations sont de même sens ou de sens opposés, l'axe résultant se trouve en dedans ou en dehors*

(1) Car leurs produits respectifs mesurent le double des aires des deux triangles qui forment chacun la moitié du parallélogramme.

de l'intervalle des premiers, et sa vitesse angulaire est égale à la somme ou à la différence des proposées.

XVII. *Couples de rotation.* — Attachons-nous un instant au cas particulier de deux rotations égales autour d'axes parallèles et de sens contraire. C'est ce que l'on nomme *couple de rotation.*

Si on cherche à le réduire par la règle précédente, on obtient une vitesse angulaire nulle autour d'un axe situé à l'infini dans le plan des deux premiers, c'est-à-dire une translation perpendiculaire à ce plan. On s'assurera facilement sur une figure qu'elle est dirigée du côté où il faut regarder le couple pour le voir tourner dans le même sens que les aiguilles d'une horloge, en considérant ses deux droites représentatives comme des tendances à la rotation du *bras de levier* du couple. Quant à la valeur de cette translation, il suffit, puisqu'elle est la même pour tout l'espace, de l'évaluer pour un seul point, et, par exemple, pour l'une des extrémités du bras de levier. Ce point ne recevant pas de mouvement de la part de l'une des rotations, sa vitesse absolue sera celle de la seconde ou (VI) le produit de la vitesse angulaire commune par le bras de levier. C'est ce que l'on nomme le *moment du couple.*

Ainsi *un couple de rotation équivaut à une translation égale à son moment, perpendiculaire à son plan, et dirigée dans le sens où il faut regarder le couple pour le voir tourner comme les aiguilles d'une horloge.*

On pourra, par suite, faire subir à un couple toutes les modifications qui n'altéreront aucun des trois éléments dont dépend la translation équivalente. Et, par suite, *on peut tourner et transporter à volonté un couple dans son plan, transporter ce plan parallèlement à lui-même, enfin modifier arbitrairement, mais en raison inverse l'un de l'autre, la vitesse angulaire et le bras de levier.*

La considération des couples permet de transporter à volonté un axe représentatif de rotation d'une position ω dans une autre parallèle ω'. Car, si nous introduisons deux rotations égales et opposées ω' et ω'', ce qui ne change rien à l'état des choses, nous pouvons, ne conservant que ω', considérer ω et ω'' comme formant un couple, et les supprimer en les remplaçant par la translation équivalente. Cet artifice va nous permettre de résoudre très-simplement les deux cas suivants.

XVIII. *Translation et rotation.* — Désignons par v et ω les droites représentatives de la translation et de la rotation qu'il s'agit de réduire ensemble. Je décompose par un rectangle (XIV) la translation v en deux autres : v' parallèle et v'' perpendiculaire à ω. Je remplace ensuite v'' par un couple de rotations qui ait pour vitesses angulaires ω' et ω'', cette dernière étant égale et opposée à ω. Cela est possible, puisque le plan du couple doit être perpendiculaire à v'', c'est-à-dire parallèle à ω, et que, du reste, l'une des deux vitesses angulaires égales peut être prise à volonté (XVII). Dès lors ω et ω'' se détruisent respectivement et il reste seulement ω' et v', c'est-à-dire une rotation autour d'un axe et une translation parallèle à cet axe, ou un mouvement héliçoïdal (VII) dont les éléments se trouvent déterminés.

Si l'on cherche en particulier la condition pour que le résultat de la composition soit une rotation simple, il sera pour cela nécessaire et suffisant que v' soit nulle ou que la translation proposée soit perpendiculaire à l'axe de la rotation.

XIX. *Deux rotations d'axes non concourants.* — Désignons par ω et ω' les deux droites représentatives non situées dans un même plan. J'applique en un point quelconque de l'axe ω' deux rotations égales et directement opposées ω_1, ω_2, qui soient en même temps parallèles et

égales à ω. Dans ces conditions, ω et ω_2 forment un couple que l'on peut remplacer par une translation (XVII). De plus, ω' et ω_1 sont deux rotations dont les axes concourent au point qui a été choisi. Elles se réduisent donc par parallélogramme (XV) à une seule rotation. Dès lors on rentre dans l'application de la règle précédente (XVIII).

On remarquera que le résultat de la composition ne pourra jamais être une rotation simple, c'est-à-dire (XVIII) que la translation équivalente au couple ne pourra être perpendiculaire à l'axe de la rotation, qui résulte par parallélogramme de ω' et ω_1. En effet, cette translation est perpendiculaire au plan de son couple ; il faudrait donc que la résultante du parallélogramme fût comprise dans ce plan ; or cela est impossible, puisque ce parallélogramme est construit sur une droite ω_1 située dans ce plan comme opposée à ω_2, et d'une autre ω' qui ne saurait s'y trouver, car alors elle serait comprise dans un même plan avec ω, ce qui est contraire à l'hypothèse.

XX. *Deux mouvements quelconques.* — Quels que soient les mouvements proposés, chacun d'eux pourra toujours (XII) être considéré comme formé d'une rotation et d'une translation. On commencera par ramener les axes de rotation à passer par un même point, sur lequel ils se composeront par parallélogramme (XV). Il suffira, pour cela, d'introduire un couple (XVII), c'est-à-dire une translation. Les trois translations se réduisant ensuite à une seule par des parallélogrammes successifs (XIV), on rentrera dans l'application de la règle précédente (XVIII).

THÉORÈME DU MOUVEMENT RELATIF.

XXI. Proposons-nous dans toute sa généralité la question suivante : Quel est le mouvement relatif d'un corps par

rapport à un autre, lorsque tous les deux sont animés de mouvements connus.

Si nous supposons pour cela qu'un observateur soit entraîné à son insu dans le mouvement M du système S, la question sera de savoir quelle apparence lui présentera le solide S′, animé en réalité d'un mouvement M′. Comme le mouvement apparent résultera pour l'observateur de mesures prises à chaque instant par rapport au système S (I), nous pouvons attribuer aux deux objets tel mouvement que nous voudrons, pourvu que ce soit pour les deux un même mouvement de solide, comme s'ils formaient deux parties solidaires d'un seul corps invariable. Dans ce cas, en effet, le mouvement que nous introduisons ne modifiera nullement par lui-même la situation respective des deux systèmes. Cette situation ne sera, dès lors, altérée à chaque instant qu'en raison des mouvements indépendants des deux corps, de telle sorte que les apparences ne seront pas changées. Il suffit, par suite, de les chercher dans ces nouvelles conditions.

Appliquons, par exemple, aux deux corps un mouvement M_1 égal et directement opposé à M. Nous en avons le droit, car M_1 est un mouvement de solide, puisque par le fait il est attribué en sens contraire au système S. Par là ce dernier corps, animé à la fois de deux mouvements inverses M et M_1, est réduit au repos, de sorte que l'observateur se retrouve dans les conditions ordinaires. Le mouvement apparent sera donc le résultat de la composition par les règles précédentes des deux mouvements M′ et M_1, qui animent alors le corps S′. D'où le théorème suivant, dont nous ferons un continuel usage :

Le mouvement relatif d'un solide par rapport à un autre s'obtient en composant son mouvement propre avec le mouvement inverse du second.

Si en particulier on veut juger du mouvement relatif

d'un corps fixe par rapport à un autre qui est mobile, la règle précédente montre que le corps fixe paraîtra animé du mouvement inverse de celui de l'observateur. C'est ainsi, par exemple, que nous attribuons à la voûte céleste, en la changeant de sens, la rotation de la terre qui nous entraîne sans que rien en avertisse nos sens.

ROULEMENT ET GLISSEMENT.

XXII. Il est facile de comprendre par quel trait d'union les considérations précédentes trouveront une application utile dans l'étude des mécanismes. En effet, sauf des exceptions relativement rares, telles que les cordes ou les fluides, les pièces de machines sont en général des corps solides. De plus, si l'on écarte le cas des machines électromotrices, les forces exercées à distance n'y jouent aucun rôle et on n'emploie que des actions de contact. Enfin, les efforts brusques, tels que les chocs, les explosions, en sont bannis autant que possible comme nuisibles à l'économie du travail et à la solidité des appareils. L'action sera par suite continue. En résumé, les organes de machines nous présenteront ordinairement deux corps solides qui restent toujours en contact. Il convient donc d'étudier en terminant le mouvement relatif de l'un de ces corps par rapport à l'autre. Nous pourrons, pour cela (XXI), réduire par la pensée ce dernier au repos.

Roulement. — Nous distinguerons à cet égard trois natures de mouvement. Le cas le plus simple est celui du *roulement*. Pour le définir, je considérerai d'abord deux courbes solides. On dit alors qu'il y a roulement lorsque les arcs qui s'appliquent l'un sur l'autre sont toujours égaux.

Si nous prenons en second lieu deux surfaces qui se touchent à chaque instant par un point, nous imaginerons les deux courbes que dessine sur chacun des corps la série des

points de contact; le roulement de ces lignes déterminera celui des surfaces.

Si nous envisageons enfin deux surfaces qui se touchent à chaque instant le long d'une ligne, il faudra s'occuper successivement de tous les points de cette ligne. Pour chacun d'eux on imaginera que l'on trace par ce point sur l'une des surfaces une petite courbe destinée à laisser son empreinte sur l'autre pendant le mouvement, et l'on dira que les deux surfaces roulent au point en question, s'il y a roulement entre ces deux lignes.

Dans le roulement simple, le point de contact a une vitesse nulle. Car ses deux positions, après un temps élémentaire, forment les extrémités d'arcs tangents égaux en longueur, et, à ce titre, ne sont séparées que par un intervalle du second ordre.

Glissement. — Un second cas simple est celui du *glissement.* Il se produit lorsque le contact s'effectue constamment par le même point de l'un des corps. La vitesse de ce point s'appelle *vitesse de glissement.*

Il ne faut pas confondre le glissement avec la translation. Un glissement instantané peut être en effet considéré (XII) comme composé d'une translation avec la vitesse de glissement et d'une rotation autour d'un axe passant par le point de contact.

Mouvement mixte. — Tous les cas qui ne rentrent pas dans l'un ou l'autre des deux précédents sont réunis sous la dénomination de *mouvement mixte.*

On peut le considérer comme composé à chaque instant de roulement et de glissement. Supposons, en effet, que le contact s'opère à deux instants successifs en M et M′ (*Pl. I, fig.* 4). Réduisons par la pensée (XXI) la courbe M*m*M′ au repos, et soit M_1 la position où parvient sur la courbe mobile le premier point de contact M. Si nous prenons

$M'm = M'M_1$, on pourra imaginer que la courbe mobile glisse le long de l'arc Mm pour rouler ensuite sur l'arc mM'. On appelle ces deux longueurs *arc de glissement* et *arc de roulement*. En divisant ces arcs élémentaires par le temps infiniment petit, on obtient les *vitesses de glissement* et *de roulement*. Leur rapport peut servir à chaque instant de caractéristique au mouvement mixte.

On aura la vitesse de roulement en ajoutant ou retranchant, suivant les cas, la vitesse de déplacement total du point de contact et la vitesse de glissement. Cette dernière s'obtiendra d'ailleurs directement en divisant par le temps infiniment petit la distance qui sépare à l'instant final les deux points qui se trouvaient primitivement en contact. En effet, l'arc de glissement Mm peut être remplacé par MM_1, car nous avons vu que le déplacement mM_1, dû au roulement, est du second ordre infinitésimal.

CLASSIFICATION.

GÉNÉRALITÉS SUR LES MACHINES.

XXIII. Le problème de l'industrie mécanique consiste toujours à utiliser pour l'élaboration artificielle de certaines matières les forces naturelles que nous trouvons autour de nous. C'est ainsi que pour le martelage du fer, l'élévation des eaux, le tissage des fils, etc., nous disposons indistinctement de la force du cheval, du poids d'une chute d'eau, de l'expansion de la vapeur, etc. Pour mettre en rapport deux choses aussi différentes, un intermédiaire est toujours indispensable : on lui donne le nom de *machine*.

Ainsi donc toute machine est un appareil destiné à mettre

en relation un *moteur* avec une *matière à élaborer*. On y peut toujours, d'après cela, apercevoir trois parties distinctes.

La première se trouve en rapport immédiat avec le moteur; elle se modèle sur lui et s'adapte à sa nature spéciale : on l'appelle le *récepteur*. Ce sera, par exemple, pour les moteurs que nous avons cités, un manége, une roue hydraulique, une machine à vapeur, etc.

Une seconde partie, placée à l'autre extrémité de l'appareil, est en contact direct avec la matière à élaborer. On l'appelle *opérateur;* elle remplace l'outil que ferait mouvoir en l'absence de la machine la main de l'ouvrier. Ce sera, pour les élaborations que j'ai prises pour exemples, un marteau, une pompe, une Jacquart, etc.

Entre ces deux parties, qui empruntent une physionomie spéciale à la nature propre du moteur et de la matière à élaborer, s'en trouve une troisième destinée à les relier. Elle est plus exclusivement mécanique, et ses éléments se retrouvent toujours à peu près les mêmes sauf leur mode de groupement. Nous les appellerons les *mécanismes*. Ce seront, par exemple, des engrenages, des excentriques, des cordes sans fin, des parallélogrammes, etc.

L'étude des machines se divise, d'après cela, en trois parties correspondantes. Mais celle des opérateurs appartient, à proprement parler, à la technologie, et son champ, du reste, est à peu près indéfini, car il constitue le programme de l'industrie mécanique tout entière. L'étude des récepteurs est plus circonscrite, car le nombre des moteurs naturels est très-limité. Elle forme un cadre spécial étranger au sujet que je me propose ici de traiter. Nous nous restreindrons donc à l'étude des mécanismes, que j'envisagerai d'ailleurs d'une manière complète.

XXIV. Il faut pour cela embrasser deux points de vue

distincts. Le premier est exclusivement géométrique. Il est destiné à rendre compte aux yeux du mode de transmission ou de modification de mouvement qui s'opère d'un organe au suivant dans la composition des machines.

La seconde étude s'attache au point de vue dynamique ou aux résistances qui peuvent se développer. Elle est utile, en premier lieu, pour discuter les différents dispositifs au point de vue de l'économie du travail des forces dont on dispose. On s'exposerait, en outre, en la négligeant, aux plus graves mécomptes, car ces résistances peuvent parfois (370) entraver le mouvement d'une manière absolue et dont les aperçus géométriques sont impuissants à rendre compte; de sorte que telle combinaison profondément ingénieuse sur le papier ne saurait en sortir pour passer dans le domaine de l'application, fût-ce même dans un simple but de curiosité.

Ces deux points de vue se partageront les deux Parties de ce Traité.

CLASSIFICATION DES MÉCANISMES.

XXV. Nous établirons d'abord dans la liste des mécanismes deux grandes divisions, suivant que les deux pièces qui les constituent agissent l'une sur l'autre par contact immédiat ou à l'aide d'un intermédiaire.

Les organes de contact immédiat se classeront naturellement d'après le genre de leur mouvement relatif (XXII). A cet égard il y aura lieu de distinguer les organes à roulement simple ou *galets*, les organes à glissement simple ou *glissières*, et les organes à mouvement mixte. Pour ces derniers une subdivision est encore nécessaire.

Lorsqu'on voudra produire un mode déterminé de transmission, l'analyse du problème conduira à un certain profil pour les pièces. S'il s'agit d'une machine dite *d'adresse*,

c'est-à-dire où l'économie du travail des forces ait une importance secondaire et qui ne puisse entrer en comparaison avec celle de la précision de l'ouvrage, rien n'empêchera d'employer dans tout son développement, s'il est limité, ou dans une étendue notable pour le cas contraire, le tracé fourni par la Cinématique. On formera ainsi la classe des *excentriques*. Mais s'il s'agit d'une machine *de force* où l'intensité des efforts exercés soit considérable, le travail des frottements croît en proportion, et il devient nécessaire de l'atténuer en diminuant les glissements relatifs. Or, si, après avoir réduit par la pensée au repos (XXI) l'une des pièces, on imagine le lieu des centres instantanés de la pièce mobile, il importe que le contact ne s'en éloigne jamais sensiblement, car les vitesses croîtraient en raison de cette distance (VIII). D'après cela on ne devra conserver du tracé que fournit la Cinématique qu'une petite étendue aux environs du lieu des centres. Pour obtenir, d'ailleurs, la continuité de la transmission, on sera conduit à employer une série de ces petits appendices disposés le long du lieu des centres instantanés. De là une quatrième classe d'appareils qui emprunteront à cette particularité un aspect spécial : ce sont les roues dentées ou les *engrenages*.

Nous avons compris dans la seconde division les mécanismes dans lesquels les deux pièces principales agissent l'une sur l'autre à l'aide d'un intermédiaire dont le mouvement individuel n'a qu'une importance secondaire. Ces appareils se classeront naturellement suivant le genre de l'intermédiaire. Lorsqu'il sera solide nous aurons la classe des *bielles*, et quand il sera flexible celle des *cordes*.

XXVI. Ces six chapitres comprendront tous les organes par lesquels s'effectue la transmission proprement dite du mouvement, depuis le récepteur jusqu'à l'opérateur. Mais d'autres appareils sont encore nécessaires, sinon pour la

marche, du moins pour la bonne marche d'une machine. Nous les appellerons à ce titre *appareils accessoires*, et il s'en présentera trois sortes.

La première est celle des *régulateurs*. Ils sont destinés, comme l'indique leur nom, à mettre le mouvement de la machine à l'abri des irrégularités qui peuvent provenir du moteur, de la résistance à vaincre ou de toute autre cause.

La seconde, qui remplit en quelque sorte un rôle inverse, est celle des *embrayages*, destinés à introduire des irrégularités ou, pour mieux dire, des modifications du mouvement à la volonté du mécanicien, notamment la mise en marche et l'arrêt de la machine.

Nous comprendrons dans une dernière classe les *indicateurs* de toutes sortes ou appareils d'observation, tels que enregistreurs, manomètres, dynamomètres, etc. C'est en quelque sorte l'arsenal du mécanicien, non plus pour accomplir un effet industriel déterminé, mais pour perfectionner son art en général ou la conduite de sa machine en particulier, en observant les lois et toutes les circonstances qui l'intéressent.

En résumé, nous rangerons tous les appareils que nous avons à étudier dans les neuf classes suivantes :

- Transmission.
  - Contact immédiat.
    - Roulement simple. — *Galets.*
    - Glissement simple. — *Glissières.*
    - Mouvement mixte.
      - *Excentriques.*
      - *Engrenages.*
  - Intermédiaire ....
    - Solide..... — *Bielles.*
    - Flexible..... — *Cordes.*
- Appareils accessoires.....
  - *Embrayages.*
  - *Régulateurs.*
  - *Indicateurs.*

CLASSIFICATION DE MONGE.

XXVII. Une autre classification a été proposée dans l'origine par Monge et suivie à peu près sans modifications

par tous les auteurs qui se sont occupés depuis du même sujet. J'en vais exposer succinctement le principe, et j'indiquerai en même temps les raisons pour lesquelles j'ai cru devoir lui substituer la précédente.

On distingue tous les mouvements en trois sortes : rectiligne, circulaire et quelconque. Remarquant en outre que chacun d'eux peut être progressif ou alternatif, c'est-à-dire de va-et-vient, on obtient six types distincts. On classe ensuite les organes d'après la double nature des mouvements de leurs deux pièces. A cet égard on peut grouper ensemble deux mouvements semblables ou dissemblables, ce qui fournit

$$6+\frac{6.5}{1.2}=21$$

vingt et une combinaisons distinctes.

Ce nombre de classes est excessif pour le sujet et impose à l'esprit une trop grande subdivision. De plus, la répartition des organes s'y fait d'une manière très-défectueuse. Un petit nombre de catégories condense la presque totalité des mécanismes et quelques-unes sont à peu près dénuées d'exemples à l'appui. Enfin, ce principe de classification a le défaut capital de réunir des appareils entièrement dissemblables et de disséminer de tous côtés les analogies véritables (1).

Cette méthode ne paraît présenter qu'un seul avantage véritable, c'est qu'elle constitue une sorte de dictionnaire où l'on peut aller chercher l'organe dont on devra se servir pour opérer une transmission de nature déterminée. Mais quel est le mécanicien vraiment digne de ce nom qui pour

(1) Je n'en citerai qu'un seul exemple : pour envisager complétement la théorie des engrenages, qui se détache pourtant très-nettement de l'ensemble des autres mécanismes, on est obligé de la chercher dans presque toutes les catégories établies.

la composition d'une machine devra feuilleter un pareil répertoire? La classification n'est ici réellement utile que pour l'étude et l'exposition didactique, et à ce titre elle doit par-dessus tout grouper les analogies fondamentales.

J'ai été conduit par ces raisons à adopter le point de vue que je viens d'exposer, pour la classification des organes (XXV). Je dois avertir en même temps que ses avantages s'apprécient surtout à l'usage et quand on a parcouru l'ensemble de cette étude, bien plus que par l'aperçu préalable que j'ai dû cependant en présenter tout d'abord.

PREMIÈRE PARTIE.

ÉTUDE GEOMÉTRIQUE DES MÉCANISMES.

CHAPITRE PREMIER.

GALETS DE TRANSMISSION UNIFORME.

§ I.

GÉNÉRALITÉS.

1. Nous comprenons sous la dénomination de *galets* les organes de contact immédiat et de roulement simple (XXV).

Leur avantage caractéristique consiste dans la substitution de la résistance très-faible que développe le roulement au frottement de glissement relativement intense.

Ils présentent en revanche un inconvénient sérieux dans la formation des *facettes*. Pour peu, en effet, que la surface courbe présente une irrégularité un peu brusque, il s'y produira périodiquement un ressaut qui tendra à l'augmenter. Si la machine s'arrête dans le voisinage immédiat, le galet aura tendance à tomber dans ce cran, et la pression mutuelle le développera encore. Enfin, s'il s'y arrête un instant pendant le mouvement, le glissement et l'usure augmenteront rapidement le méplat, et le galet hors d'état désormais de rouler sera devenu une glissière et une mau-

vaise glissière, puisque sa forme n'a pas été calculée pour ce genre d'action.

2. Deux surfaces peuvent se toucher géométriquement par un point ou suivant une ligne, c'est-à-dire physiquement, par un petit espace fermé ou le long d'une zone très-étroite. Comme la première étendue est petite dans tous les sens, elle est beaucoup plus restreinte que la seconde. Or, la pression mutuelle des deux pièces est équilibrée par le jeu moléculaire des parties placées en présence. Elle occasionnera donc une fatigue et une tendance à l'usure plus marquées avec le premier mode de contact, et, pour cette raison, le second doit lui être préféré.

Mais si les deux surfaces se touchent par une ligne, il importe que le roulement ait lieu dans toute son étendue, c'est-à-dire que tous ses points aient une vitesse nulle (XXII). Joignons-en deux quelconques par une droite : ce sera un axe instantané dont tous les points auront de même une vitesse nulle. Si en outre la ligne de contact présentait un seul point en dehors de cet axe, il formerait avec les premiers un triangle de repères (IV) dont les trois vitesses seraient nulles, ainsi, par conséquent, que celle de tout autre point du solide; et comme il en doit être de même à un instant quelconque, le corps se trouverait réduit à l'immobilité et cesserait d'être un organe de machines. La ligne de contact ne peut donc être qu'une droite, et l'on voit que les surfaces doivent être telles, qu'on y puisse tracer une infinité de lignes droites. En d'autres termes, *les galets sont nécessairement des surfaces réglées.*

A cette catégorie fort étendue de surfaces, la pratique de la construction n'emprunte que les cylindres et les cônes, qu'elle installe autour d'axes de rotation parallèles aux génératrices du cylindre ou passant par le sommet du cône.

3. Étudions, d'après cela, le mouvement relatif des galets. Nous devrons, à cet effet (XXI), réduire par la pensée l'un d'eux au repos et composer pour l'autre son mouvement propre avec le mouvement inverse du premier, c'est-à-dire deux rotations.

Pour les galets cylindriques, ces deux rotations ont des axes parallèles. Le mouvement résultant sera donc (XVII) une rotation instantanée autour d'un axe parallèle aux proposés et situé dans leur plan. De sorte qu'en projection sur le plan de section droite, son pied tombe sur la ligne qui joint les autres. Si donc Δ désigne la distance constante des centres, r et r' celles qui les séparent du centre instantané, on aura

$$r \pm r' = \Delta,$$

le signe dépendant des sens respectifs des rotations que nous pouvons laisser indéterminés. Nous savons de plus (XVII) que les distances de l'axe instantané aux axes proposés sont en raison inverse des vitesses angulaires, et, par suite,

$$\frac{r}{r'} = \frac{\omega'}{\omega}.$$

Pour les galets coniques, nous trouverons des formules analogues. La composition des rotations s'effectue alors (XVI) par un parallélogramme. Si donc α désigne l'angle constant des deux axes proposés, et φ, φ' ceux qu'ils font avec l'axe instantané, on aura

$$\varphi + \varphi' = \alpha,$$

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi'} = \frac{\omega'}{\omega}.$$

Il y a lieu, d'après cela, de distinguer les galets en deux catégories, suivant que le rapport de leurs vitesses angu-

laires est constant ou variable, c'est-à-dire que la transmission est uniforme ou variée.

PREMIÈRE CATÉGORIE. — *Galets de transmission uniforme.*

SECONDE CATÉGORIE. — *Galets de transmission variable.*

§ II.

GALETS DE TRANSMISSION UNIFORME.

4. Les galets de transmission uniforme intéressent plus particulièrement la pratique, et il en est de même, en général, des transmissions à rapport de vitesses constant. Le mouvement uniforme est, en effet, de tous celui que l'on doit préférer pour les pièces de machines, quand aucune raison ne s'y oppose d'ailleurs. Il est, en effet, le plus compatible avec la régularité de l'ouvrage que l'on veut effectuer; et, en outre, il établit les ressorts moléculaires dans un état fixe au lieu d'occasionner des variations de tension qui fatiguent à la longue les pièces et nuisent à la précision de leur ajustement. Or, si on veut que les vitesses de deux pièces consécutives puissent être constantes, il faut évidemment que leur rapport soit lui-même constant.

Les équations précédentes suffisent à déterminer la forme des galets de transmission uniforme. Elles deviennent, en effet, pour les cylindres,

$$r \pm r' = \text{const.}, \quad \frac{r}{r'} = \text{const.},$$

c'est-à-dire

$$r = \text{const.}, \quad r' = \text{const.}$$

Comme du reste r et r' sont les rayons vecteurs du profil de la section droite, par rapport aux centres fixes, on voit que ces profils seront circulaires, et par suite les cylindres de révolution.

On aura de même pour les cônes :

$$\varphi + \varphi' = \text{const.}, \quad \frac{\sin\varphi}{\sin\varphi'} = \text{const.},$$

et par suite :

$$\varphi = \text{const.}, \quad \varphi' = \text{const.},$$

c'est-à-dire que les cônes seront aussi de révolution.

5. Il peut sembler, au premier abord, que cette solution soit irréalisable. En effet, la conduite d'une courbe par une autre tient, en général, à ce que les rayons vecteurs de celle-ci, allant en croissant, devront déplacer ceux de la première pour s'ouvrir un passage, en raison de cette propriété de la matière qu'on nomme l'*impénétrabilité*. Or, cette raison ne subsiste plus pour les profils circulaires dont tous les rayons sont égaux. Mais on peut en revanche en invoquer une autre appelée l'*adhérence*, en raison de laquelle un profil, qui tend à glisser le long d'un autre, l'entraînera tant que ce dernier ne sera pas maintenu par une résistance supérieure à une certaine limite. Cette limite d'adhérence est proportionnelle à la pression mutuelle des deux corps, et on l'appelle *force de frottement*. Nous reviendrons par la suite avec détail sur ces phénomènes.

Il résulte tout à la fois de ce mode d'action des *rouleaux de friction*, soit cylindriques, soit coniques, un avantage et un inconvénient. L'inconvénient réside dans cette limite de l'adhérence, peu élevée en général, au delà de laquelle la transmission cessera d'avoir lieu, ce qui tend à écarter ces organes des machines de force. L'avantage consiste de son côté dans cette possibilité du glissement, pour certains appareils sujets à des variations brusques de force qui tendraient à briser les organes d'une transmission obligée, comme des dents d'engrenage, tandis qu'ils ne feront que

déterminer un glissement accidentel des rouleaux l'un sur l'autre.

Ajoutons que M. Minotto a trouvé le moyen d'atténuer considérablement le défaut en question, par l'emploi d'une disposition ingénieuse qu'il appelle *engrenage à coin*. Elle consiste à tailler un des galets en biseau, comme une lentille, et l'autre en gorge, comme une poulie très-refouillée. Par là, en effet, les galets se comportent l'un par rapport à l'autre comme un coin dans sa fente. Or on sait, sans qu'il soit besoin d'invoquer pour cela ici la théorie (375), que l'effet du coin est d'augmenter considérablement la pression mutuelle des deux corps, et par suite la limite d'adhérence en laissant constant l'effort qui tend à rapprocher les deux axes.

6. Au point de vue du parti que les constructeurs ont su tirer de l'emploi des rouleaux de friction, on peut répartir ces appareils en trois genres :

PREMIER GENRE. — *Galets fixes.*

DEUXIÈME GENRE. — *Galets mobiles.*

TROISIÈME GENRE. — *Galets d'interposition.*

Nous appelons galets fixes ceux dont l'axe est fixe. Ils ne fonctionnent que comme *guides* pour le mouvement de la pièce placée au contact, et la vitesse de leur axe est nulle. J'indiquerai comme exemple les *laminoirs,* formés de cylindres dont le mouvement entraîne par adhérence la barre de fer interposée.

Les galets mobiles sont ceux dont l'axe est porté sur le corps mobile. Sa vitesse est égale à celle de ce corps. Je citerai comme exemple les *roues de voiture.*

Les galets d'interposition sont indépendants à la fois du corps fixe et du corps mobile. Je citerai comme exemple les *rouleaux* qui servent aux tailleurs de pierre ou de charpente à transporter de lourds fardeaux.

La vitesse de l'axe des galets d'interposition est la moitié de celle du corps mobile. En effet, celui-ci roulant sur le galet, il n'y a pas de vitesse de glissement relative. La vitesse absolue du madrier est donc celle du point le plus haut du cercle. Pour la même raison, celle du point le plus bas est la même que pour le sol; ce point a donc une vitesse nulle, et appartient par suite à l'axe instantané. Or les vitesses des différents points sont proportionnelles (VIII) à leurs distances à cet axe, et comme la distance du point le plus haut est le diamètre, tandis que celle de l'axe de figure n'est que le rayon, le rapport des deux vitesses sera de moitié.

§ III.

EXEMPLES.

7. GALETS FIXES. — *Suspension de la machine d'Atwood.* — Cette machine étant un appareil de précision, il est nécessaire d'éviter le frottement sur l'axe de rotation de la poulie, que l'on suspend pour cela sur un train de galets (*Pl. V, fig. 71*).

Ce système ne peut être employé que lorsque l'appareil est d'une grande légèreté. On s'exposerait sans cela à des poussées latérales. Il faut, quand le poids devient considérable, le faire porter directement sur l'axe de rotation des galets, comme dans les deux exemples suivants.

8. *Suspension des cloches.* — Ce dispositif est employé pour la grosse cloche de la cathédrale de Metz. Son axe doit être animé d'un mouvement oscillatoire, et il importe d'en atténuer le frottement dont l'intensité rendrait la manœuvre difficile. A cet effet, on le fait porter sur un premier galet oscillant (*Pl. V, fig. 72*), et on l'y maintient sur le point le plus haut à l'aide de deux galets latéraux qui l'empêchent de chavirer. Ceux-ci sont reliés entre eux par

une pièce en V renversé, qui oscille elle-même, de manière que la descente de chacune des joues fasse remonter l'autre.

9. *Galets d'alimentation.* — Les locomotives sont des machines à vapeur montées sur un véhicule. Leur chaudière est alimentée par une pompe que manœuvre la machine elle-même. La locomotive est donc obligée de courir sur les rails pour alimenter. Afin d'éviter l'encombrement produit par cette manœuvre dans les grandes gares, on a recours à un moyen très-simple.

On interrompt en six points, convenablement espacés, les deux rails d'une voie spéciale, et on les raccorde dans cet intervalle par les points les plus hauts de six galets verticaux placés en contre-bas du sol. La locomotive est amenée sur ces six points, calée par un léger obstacle et mise en mouvement. Ses roues tournent et entraînent dans leur rotation les rails circulaires sans que le véhicule se déplace.

10. *Galet totaliseur.* — On emploie dans les dynamomètres à compteur l'appareil suivant (*Pl. V, fig.* 73).

Un plateau A tourne autour de son axe avec une vitesse ω. Une roulette B est posée sur ce plateau, de manière que son plan soit perpendiculaire au rayon r du point de contact, que le mode d'installation permet d'ailleurs de faire varier. Désignons par r' et ω' le rayon et la vitesse angulaire de cette roulette, et exprimons que les deux points en contact ont la même vitesse, ce qui est la condition du roulement relatif :

$$\omega r = \omega' r'.$$

r' étant constant, on voit par là que la rotation de la roulette sera en raison composée de celle du plateau et de la distance variable au centre.

11. *Cône totaliseur.* — On rencontre dans le planimètre d'Oppikofer un mécanisme qui ne diffère du précédent qu'en ce que le plateau est remplacé par un cône (*Pl. V, fig. 74*). La roulette se déplace alors le long d'une génératrice. Si d désigne la distance variable du point de contact au sommet, on aura

$$\omega d \sin \alpha = \omega' r' ;$$

r' et α étant constants, on voit que la rotation de la roulette sera encore en raison composée de celle du cône et de sa distance au sommet.

12. *Fusée en tractrice.* — Dans le cas précédent, l'extrémité de l'axe de la roulette se transporte parallèlement à une génératrice du cône. Si on veut lui faire parcourir l'axe même du corps tournant, il est facile d'assigner le profil que doit alors prendre celui-ci. Si, en effet, nous employons comme roulette un tronc de cône infiniment mince, dont le sommet parcoure l'axe de la fusée (*Pl. I, fig.* 5), son apothème formera la longueur de la tangente à la courbe cherchée, et comme il est constant, on voit que ce profil est une *tractrice* ou développante de chaînette. Ce résultat a été indiqué par Willis, qui le déduit d'une analyse un peu compliquée.

13. GALETS MOBILES. — *Roues à boudin.* — Ces roues sont employées pour la circulation des wagons sur les voies de fer (*Pl. V, fig.* 75).

Les rebords ou boudins sont destinés à empêcher le déraillement, c'est-à-dire l'écartement à droite ou à gauche. Mais il faut éviter qu'une cause quelconque, telle que la pression du vent, tende à appuyer d'une manière permanente les boudins contre le rail, à cause du frottement nuisible qui en résulterait. On y obvie par la conicité des jantes. A cet effet, les galets, au lieu d'être cylindriques,

affectent la forme de troncs de cône dont les sommets sont extérieurs à la voie. Si nous supposons, par exemple, que le train éprouve une tendance à appuyer à gauche, la roue de gauche roulera par une section plus grande et celle de droite par une moindre. L'essieu ne pourra donc s'avancer parallèlement à lui-même, et il se produira une déviation vers la droite qui ramènera le train dans l'axe de la voie.

La conicité a encore une autre utilité dans les courbes. L'effet connu sous le nom de *force centrifuge*, et qu'on peut concevoir comme une déviation apparente de la pesanteur, oblige alors à donner à la voie une inclinaison transversale pour la mettre à angle droit sur cette pesanteur fictive. Mais comme la force centrifuge dépend de la vitesse, et que celle-ci n'est pas la même pour tous les trains, on ne peut que prendre une moyenne, et il reste une tendance à verser en dehors pour les trains de grande vitesse, et en dedans pour ceux de petite vitesse. La correction de cette inclinaison se trouve dans la conicité. En effet, pour ne considérer que les trains de grande vitesse, ils tendent à appuyer vers l'extérieur, c'est-à-dire à faire porter la roue extérieure sur une grande et la roue intérieure sur une petite section, ou à relever ainsi encore davantage l'inclinaison de l'essieu, en faisant en même temps parcourir le plus grand des deux rails par la plus grande circonférence.

14. *Système articulé de Sceaux.* — Le système précédent ne peut s'engager dans les courbes que par approximation, attendu que les deux essieux d'un même wagon devraient rester normaux à la voie, tandis que la structure invariable du châssis du wagon les oblige à demeurer parallèles l'un à l'autre. M. Arnoux a imaginé, pour les courbes très-accentuées, un système qui permet à tous les essieux de conserver leur indépendance (*Pl. V, fig. 76*).

Les roues sont alors folles sur leurs essieux, et ceux-ci sont assemblés au châssis par des chevilles ouvrières. Par là toutes les pièces deviennent indépendantes. Pour assurer, en outre, leur direction, on adapte au premier essieu un train de quatre galets-guides, qui s'appuie sur les bords intérieurs des rails, et oblige cet essieu à se placer normalement au cercle de la voie. Un système semblable guide le dernier essieu ; quant aux axes intermédiaires, on les relie aux deux extrêmes de la manière suivante :

Les deux chevilles ouvrières d'un même wagon sont portées par une pièce solide qu'on appelle la *flèche,* et les deux chevilles voisines de wagons consécutifs sont réunies par d'autres pièces rigides nommées *timons*. Toutes les flèches et tous les timons ont la même longueur. Leur système formera donc un polygone régulier capable d'être inscrit dans une courbe circulaire, si tous les angles sont égaux ou si toutes les barres se dévient par rapport aux essieux des mêmes quantités. Tel est donc l'effet à obtenir.

Pour cela chaque essieu est réuni à la flèche et au timon adjacents par quatre tiges qui forment un losange dans l'état rectiligne, et qui le formeront par suite encore pendant la déformation, puisque les quatre côtés ne cesseront pas d'être égaux. Ces tiges sont articulées sur la flèche et sur le timon en des points fixes ; mais elles sont assemblées sur l'essieu au moyen de manchons qui peuvent y glisser. Tout le système est donc symétrique par rapport à l'essieu, qui forme la diagonale du losange, et par suite la flèche et le timon feront nécessairement avec lui des angles égaux.

15. Galets d'interposition. — *Plaque tournante.* — Pour faire passer les wagons d'une voie sur une autre qui la rencontre en un point, on les amène sur une plaque que l'on peut faire tourner autour de ce point (*Pl. V, fig.* 77). Pour atténuer son frottement sur le sol, on interpose une

série de galets réunis ensemble par une couronne. Ces galets ont la forme de cônes assez aigus, dont tous les sommets se trouvent en un même point de l'axe. Les rails circulaires qui se trouvent sur le sol et sous la plaque forment eux-mêmes des cônes très-obtus qui ont le même sommet et un demi-angle complémentaire de celui des galets. Dans ces conditions, les différentes sections des galets sont dans le rapport de leurs distances à l'axe, et il en est de même des circonférences du sol et de la plaque sur lesquelles ces sections doivent se développer. Le roulement est, par suite, possible dans tous les points par application d'arcs égaux les uns sur les autres.

Un système tout semblable est employé dans les *ponts tournants*. On appelle ainsi des tabliers établis très-bas sur un cours d'eau, en raison du niveau de la circulation que l'on veut ménager, et qui doivent se déplacer par rotation, pour permettre par intervalles le passage de la navigation.

16. *Collier à galets.* — Lorsqu'un arbre vertical doit traverser les planchers d'une usine, on en profite pour y établir un guide. Afin d'éviter le frottement, on interpose alors entre l'arbre et la cuve environnante des galets cylindriques verticaux réunis par une couronne (*Pl. V, fig.* 78). Celle-ci est elle-même portée sur une série circulaire de roulettes qui circulent sur une bande circulaire horizontale et fixe.

Cet organe est également employé dans les phares tournants, pour fixer avec précision la position du système tournant de lentilles à échelons par rapport à la lampe.

CHAPITRE II.

GALETS DE TRANSMISSION VARIABLE.

§ I.

SPIRALE LOGARITHMIQUE.

17. Nous avons reconnu (3) que la condition du roulement des deux courbes planes ou sphériques (*) qui servent de directrices à des cylindres ou à des cônes est que leur contact s'effectue constamment sur la droite des centres ou l'arc de grand cercle des pôles de rotation. Telle sera donc la condition à vérifier dans chaque cas.

Une première solution indiquée par Euler repose sur l'emploi de la courbe qui traverse, sous un angle constant, tous ses rayons vecteurs. Cette courbe s'appelle *spirale logarithmique* dans un plan et *loxodromie* sur la sphère. Je me bornerai à présenter pour la spirale le raisonnement qui s'applique également aux deux cas.

18. Supposons deux spirales logarithmiques égales et assujetties à tourner autour de leurs pôles (*Pl. I, fig. 6*). Rien n'empêche de supposer que, dans une première position, elles se touchent en un point M de la ligne OO′ des centres, puisque, par hypothèse, ces courbes font toutes les

(*) Ce genre de questions n'est envisagé d'ordinaire que pour les courbes planes. La forme que nous lui donnons ici a l'avantage de s'étendre, sans autres explications, à la Géométrie de la sphère, c'est-à-dire au cas des axes concourants.

deux le même angle avec leur rayon vecteur. Il s'agit seulement de reconnaître qu'en prenant, à partir de M, deux arcs élémentaires égaux MN, MN′, les deux rayons ON, ON′ auront encore pour somme OO′; alors, en effet, les points N, N′ pourront être amenés à se confondre sur la ligne des centres, et les spirales seront par cela seul tangentes, puisqu'elles font le même angle avec tous leurs rayons vecteurs.

Si, pour le faire voir, nous abaissons NK, MK′ perpendiculaires sur OM, ON′, les triangles rectangles MNK, MN′K′ seront égaux comme ayant des hypoténuses égales et un même angle NMK = MN′K′; car c'est l'angle invariable des deux spirales. Dès lors MK = N′K′, c'est-à-dire que l'augmentation de l'un des rayons est égale à la diminution de l'autre.

19. Comme la spirale logarithmique est une courbe ouverte, on ne peut en employer, pour cette transmission, qu'une portion limitée, qui s'étend au plus depuis son pôle jusqu'au rayon vecteur égal à la distance des centres. Il sera donc nécessaire, pour obtenir la continuité de la transmission, de grouper plusieurs arcs de même nature. Pour obtenir la périodicité du mouvement, on disposera leurs cordes extrêmes suivant les côtés d'un polygone régulier (*Pl. I, fig 7*).

Pour compléter cette élégante solution, qui a été proposée par M. Weissbach, je calculerai l'angle de la spirale qui correspond au polygone de n côtés. On sait, pour cela, que, si α_n est l'angle constant de la spirale, elle a pour équation, entre les coordonnées polaires r et θ,

$$r = r_0 e^{\theta \operatorname{cotang} \alpha_n},$$

r_0 étant le rayon extrême à partir duquel nous évaluons l'azimut θ. Si donc r_1 est l'autre rayon extrême, incliné sur le premier de la moitié de l'angle au centre du polygone,

c'est-à-dire de $\frac{\pi}{n}$, on aura

$$r_1 = r_0 e^{\frac{\pi}{n}\operatorname{cotang}\alpha_n}.$$

D'ailleurs,

$$r_0 = r_1 \cos\frac{\pi}{n};$$

on a par suite, en multipliant,

$$e^{\frac{\pi}{n}\operatorname{cotang}\alpha_n} \cdot \cos\frac{\pi}{n} = 1,$$

et, en prenant les logarithmes népériens,

$$\frac{\pi}{n}\operatorname{cotang}\alpha_n + \log.\cos\frac{\pi}{n} = 0.$$

On tire de là

$$\operatorname{tang}\alpha_n = -\frac{\pi}{n\log.\cos\frac{\pi}{n}},$$

valeur essentiellement positive.

Le rapport des vitesses angulaires, qui est à chaque instant le rapport inverse des rayons vecteurs (3), se déduira facilement de l'équation de la courbe. Mais nous n'avons besoin que de connaître ses valeurs extrêmes, qui seront $\frac{r_0}{r_1}$ et $\frac{r_1}{r_0}$. Le rapport du minimum au maximum sera donc $\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^2$ ou $\cos^2\frac{\pi}{n}$. Or, il devrait être l'unité dans une transmission uniforme; l'irrégularité sera donc mesurée (1) par

$$1 - \cos^2\frac{\pi}{n},$$

(1) On remarquera cette marche fort simple que nous appliquerons à tous les organes de transmission variable pour comparer leur degré d'irrégularité.

c'est-à-dire

$$\sin^2\frac{\pi}{n}.$$

On aura d'ailleurs évidemment, dans chaque tour et pour chaque pièce, n maxima et n minima de vitesses.

Cette solution a été appliquée pour le cas particulier du carré dans la machine à imprimer de Bacon et Donkin. Nous trouverons, en faisant dans les formules précédentes $n = 4$,

$$\operatorname{tang}\alpha = -\frac{\pi}{4\log\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2\log 2} = \frac{\pi}{\log 4};$$

on en déduit, en ayant soin de ne pas oublier que le logarithme appartient au système népérien,

$$\alpha = 23^\circ 49'.$$

L'irrégularité devient en même temps

$$\sin^2\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2};$$

de sorte que le rapport des vitesses atteint un maximum double de son minimum.

§ II.

SECTIONS CONIQUES.

20. *Ellipse.* — Une seconde solution repose sur l'emploi de la courbe telle que, pour chacun de ses points, la somme des distances à deux foyers fixes reste constante. On en déduit cette autre propriété, que la tangente est partout également inclinée sur les deux rayons vecteurs. Cette courbe est appelée dans le plan *ellipse*, et sur la sphère *ellipse sphérique*. Je me bornerai encore à présenter pour l'ellipse

plane la démonstration qui convient également aux deux cas.

Nous emploierons deux ellipses égales assujetties à tourner autour de leurs foyers F, F′, que l'on sépare par une distance égale au grand axe (*Pl. I, fig. 8*). Il devient dès lors possible de leur donner une position initiale dans laquelle les deux grands axes sont dirigés suivant la ligne des centres, les ellipses se touchant par les sommets A et A'_1. Je prends, à partir de ces sommets, deux arcs égaux

$$A\Omega = A'_1\Omega.$$

Il suffit de montrer qu'après le roulement de ces arcs les deux ellipses se toucheront par Ω sur la ligne des centres, c'est-à-dire que la somme des rayons vecteurs FΩ et F′Ω sera égale à cette ligne des centres, et que les deux courbes feront avec ces rayons des angles égaux.

On a, en effet,

$$F\Omega = F'_1\Omega,$$

car ce sont deux rayons qui aboutissent à des points homologues dans deux ellipses égales. Par suite,

$$F\Omega + F'\Omega$$

a la même valeur que

$$F'_1\Omega + F'\Omega,$$

c'est-à-dire le grand axe ou la distance des centres. En second lieu, on a, par la même similitude,

$$T\Omega F = T\Omega F'_1;$$

mais d'ailleurs, en raison de la propriété que j'ai énoncée pour l'ellipse,

$$T\Omega F'_1 = T'\Omega F'.$$

Par suite,

$$T\Omega F = T'\Omega F'.$$

Ces angles, étant égaux, peuvent être opposés par le sommet, de manière que les deux courbes présentent la même inclinaison sur la ligne des centres.

Le rapport des vitesses angulaires, qui est à chaque instant l'inverse de celui des rayons vecteurs (3), se déduira encore facilement de l'équation de l'ellipse. Mais nous n'avons besoin que de connaître ses limites, qui seront évidemment

$$\frac{1-e}{1+e}, \quad \frac{1+e}{1-e},$$

en désignant, suivant l'usage, par e le rapport de l'excentricité au grand axe. Le rapport du minimum au maximum sera dès lors

$$\left(\frac{1-e}{1+e}\right)^2,$$

et l'irrégularité

$$\frac{4e}{(1+e)^2}.$$

On n'aura d'ailleurs, dans chaque tour et pour chaque pièce, qu'un maximum et un minimum de vitesses.

21. *Hyperbole.* — Ce mode de solution n'a été indiqué jusqu'ici que pour l'ellipse. Je vais montrer qu'on peut également employer les deux autres sections coniques, et d'abord l'hyperbole, c'est-à-dire la courbe telle, que la différence de ses distances à deux foyers reste constante.

Il suffit, pour cela, de prendre (*Pl. I, fig.* 9) deux hyperboles égales assujetties autour de leurs foyers que l'on établit à une distance égale à l'axe transverse. On peut alors reproduire complétement la démonstration précédente; car l'hyperbole jouit, comme l'ellipse, de la propriété d'être partout également inclinée sur ses deux rayons vecteurs.

22. *Parabole.* — On peut de même se servir de deux paraboles égales (*Pl. I, fig.* 10), dont l'une est assujettie

à tourner autour de son foyer F, et l'autre à prendre une translation rectiligne perpendiculaire à son axe $F'_1 A'_1$, le foyer de la première étant placé sur la directrice de cette dernière.

On sait, en effet, que dans la parabole les distances de chaque point au foyer et à la directrice sont égales,

$$\Omega F'_1 = \Omega F;$$

ce qui montre que les deux points réunis en Ω sont homologues sur les deux courbes. Donc les angles $F\Omega T$ et $F'_1\Omega T$ sont égaux; mais, d'après une autre propriété de la parabole, la tangente est également inclinée sur le rayon vecteur et sur l'axe. On a donc

$$F'_1\Omega T = T'\Omega K,$$

et, par suite, les angles $F\Omega T$ et $T'\Omega K$ sont susceptibles d'être opposés par le sommet, de manière que les courbes restent tangentes après que des arcs égaux $A\Omega$ et $A'_1\Omega$ ont passé par roulement.

§ III.

PROFILS DÉRIVÉS.

23. Principe général. — Concevons qu'on ait trouvé une paire de courbes roulantes quelconques. Menons dans l'une d'elles une série de rayons vecteurs infiniment voisins et marquons dans la seconde les rayons correspondants; puis, concevons que l'on rapproche tous ces rayons les uns des autres en réduisant tous leurs angles dans un rapport fixe quelconque. Les courbes ainsi obtenues fourniront encore une solution de la question.

En effet il sera possible, comme dans le premier tracé, de placer bout à bout les rayons correspondants, car ils n'ont pas changé de longueur. De plus, si l'on fait coïncider successivement les directions de ces rayons, ce sera

à l'aide de rotations dont les rapports seront les mêmes que pour les courbes proposées, car les angles de ces dernières ont été réduits proportionnellement. Ce rapport sera donc l'inverse de celui des rayons des anciennes courbes, puisqu'elles roulent (3), et par suite des nouvelles, puisque ces rayons sont les mêmes. Il y a par suite encore roulement entre les profils dérivés (1).

---

(1) Je vais montrer que ce procédé de transformation n'est qu'un cas particulier d'un autre plus étendu, et qui est en même temps le plus général que l'on puisse employer pour conserver la propriété des courbes roulantes. Nous nous proposerons pour cela le problème suivant :

Désignons par r, θ et r', θ' les coordonnées de chacun des deux profils proposés et par r_1, θ_1; r'_1, θ'_1 celles des courbes dérivées. De quelle manière devra-t-on exprimer r et θ en r_1 et θ_1 pour qu'en transformant par les mêmes formules r', θ' en r'_1, θ'_1 les nouvelles courbes soient encore capables de se conduire par roulement?

Il faut, pour le roulement des deux premières, satisfaire à deux conditions :

$$r \pm r' = \text{const.}, \quad \frac{r\,d\theta}{dr} = \frac{r'\,d\theta'}{dr'},$$

dont la première permet de disposer deux rayons vecteurs sur la ligne des centres, la seconde exprimant qu'ils font le même angle avec les deux courbes. Nous devons donc faire en sorte que ces deux équations entraînent comme conséquence forcée

$$r_1 \pm r'_1 = \text{const.}, \quad \frac{r_1\,d\theta_1}{dr_1} = \frac{r'_1\,d\theta'_1}{dr'_1},$$

quels que soient d'ailleurs les profils considérés, c'est-à-dire en laissant r et θ ou r_1 et θ_1 indépendants l'un de l'autre, ainsi que r' et θ' ou r'_1 et θ'_1.

Il est clair d'abord, sans connaître encore les formules de transformation, que $r \pm r'$ dépendra de r_1 et r'_1, mais la première condition exige que cette somme soit une fonction de $r_1 \pm r'_1$, afin que toutes les deux soient en même temps variables ou constantes :

$$r \pm r' = \mathrm{F}(r_1 \pm r'_1).$$

On en déduit

$$\frac{dr}{dr_1} = \mathrm{F}'(r_1 \pm r'_1), \quad \frac{dr'}{dr'_1} = \mathrm{F}'(r_1 \pm r'_1),$$

et, par suite,

$$\frac{dr}{dr_1} = \frac{dr'}{dr'_1} = \text{const.} = \mathrm{A}.$$

En effet, ces deux expressions sont, par hypothèse, formées d'une manière

24. Je placerai ici quelques propriétés générales de ces courbes qui ne me paraissent pas sans intérêt.

On sait, en premier lieu, que la sous-normale est le rapport des accroissements infiniment petits du rayon vecteur et de l'azimut. Pour des points correspondants, le premier reste le même, tandis que la variation d'azimut est réduite d'après le module de dérivation. Il s'ensuit que le rapport

---

identique, l'une en r_1, l'autre en r'_1 ; elles ne sauraient donc être égales qu'à la condition d'être indépendantes de l'un et de l'autre de ces deux rayons. On tire de là

$$r = \mathrm{A} r_1 + f(\theta_1);$$

car le terme arbitraire introduit par l'intégration peut, jusqu'à nouvel ordre, dépendre de θ_1.

Il faut encore que la seconde équation

$$\frac{dr'}{d\theta'} = \frac{r'}{r}\frac{dr}{d\theta} \tag{1}$$

entraîne comme conséquence forcée

$$\frac{dr'_1}{d\theta'_1} = \frac{r'_1}{r_1}\frac{dr_1}{d\theta_1}.$$

Si donc on élimine entre ces deux relations le rapport $\frac{dr'}{d\theta'_1}$, qui caractérise par sa seconde courbe le système considéré, le résultat devra être une identité.

Pour faire cette élimination, je forme les différentielles totales

$$dr = \mathrm{A}\,dr_1 + f'(\theta_1)\,d\theta_1,$$
$$d\theta = \frac{d\theta}{dr_1}dr_1 + \frac{d\theta}{d\theta_1}d\theta_1,$$

et, par suite,

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\mathrm{A}\dfrac{dr_1}{d\theta_1} + f'(\theta_1)}{\dfrac{d\theta}{dr_1}\cdot\dfrac{dr_1}{d\theta_1} + \dfrac{d\theta}{d\theta_1}}.$$

On aura de même

$$\frac{dr'}{d\theta'} = \frac{\mathrm{A}\dfrac{dr'_1}{d\theta'_1} + f'(\theta'_1)}{\dfrac{d\theta'}{dr'_1}\dfrac{dr'_1}{d\theta'_1} + \dfrac{d\theta'}{d\theta'_1}} = \frac{\mathrm{A}\dfrac{r'_1}{r_1}\dfrac{dr_1}{d\theta_1} + f'(\theta'_1)}{\dfrac{d\theta'}{dr'_1}\dfrac{r'_1}{r_1}\dfrac{dr_1}{d\theta_1} + \dfrac{d\theta'}{d\theta'_1}}.$$

Nous devons donc avoir identiquement, en substituant ces deux valeurs

des deux sous-normales reste constant et égal à n. On peut dire également que le rapport des deux sous-tangentes reste constant et égal à $\frac{1}{n}$; car le rayon vecteur, qui ne change pas ici, est dans toute courbe la moyenne géométrique de la sous-tangente et de la sous-normale. On pourra donc d'après cela, et lorsqu'on connaîtra la tangente de la courbe

---

dans l'équation (1),

$$[Ar_1+f(\theta_1)]\left[A\frac{r'_1}{r_1}\frac{dr_1}{d\theta_1}+f'(\theta'_1)\right]\left[\frac{d\theta}{dr_1}\frac{dr_1}{d\theta_1}+\frac{d\theta}{d\theta_1}\right]$$
$$=[Ar'_1+f(\theta'_1)]\left[A\frac{dr_1}{d\theta_1}+f'(\theta_1)\right]\left[\frac{d\theta'_1}{dr'_1}\frac{r'_1}{r_1}\frac{dr_1}{d\theta_1}+\frac{d\theta'}{d\theta'_1}\right],$$

ce qui nous conduit à annuler séparément les coefficients des diverses puissances du rapport $\frac{dr_1}{d\theta_1}$ qui caractérise par sa première courbe le système considéré. On obtient ainsi les trois conditions distinctes :

$$\frac{d\theta}{dr_1}[Ar_1+f(\theta_1)]=[Ar'_1+f(\theta'_1)]\frac{d\theta'}{dr'_1}, \tag{2}$$

$$\left[A\frac{r'_1}{r_1}\frac{d\theta}{d\theta_1}+f'(\theta'_1)\frac{d\theta}{dr_1}\right][Ar_1+f(\theta_1)]=[Ar'_1+f(\theta'_1)]\left[A\frac{d\theta'}{d\theta'_1}+f'(\theta_1)\frac{r'_1}{r_1}\frac{d\theta'}{dr'_1}\right], \tag{3}$$

$$f'(\theta'_1)\frac{d\theta}{d\theta_1}[Ar_1+f(\theta_1)]=[Ar'_1+f(\theta'_1)]\frac{d\theta'}{d\theta'_1}f'(\theta_1). \tag{4}$$

Si nous divisons membre à membre les deux relations extrêmes, il viendra

$$\frac{1}{f'(\theta_1)}\frac{\frac{d\theta}{d\theta_1}}{\frac{d\theta}{dr_1}}=\frac{1}{f'(\theta'_1)}\frac{\frac{d\theta'}{d\theta'_1}}{\frac{d\theta'}{dr'_1}}=\text{const.}=B,$$

c'est-à-dire

$$\frac{d\theta}{d\theta_1}=Bf'(\theta_1)\frac{d\theta}{dr_1}. \tag{5}$$

En divisant alors (3) et (2), on trouve

$$A\frac{r'_1}{r_1}Bf'(\theta_1)+f'(\theta'_1)=ABf'(\theta'_1)+\frac{r'_1}{r_1}f'(\theta_1),$$

proposée, construire très-simplement celle du profil dérivé et faciliter ainsi son tracé par points.

En second lieu, les aires élémentaires du profil générateur et du profil dérivé peuvent être assimilées à des secteurs de cercle d'angles $d\theta$ et $\frac{d\theta}{n}$. Or des secteurs qui ont des rayons égaux sont entre eux comme leurs angles, et

---

ou, en réduisant,

$$(6) \qquad (AB-1)\left[\frac{r'_1}{r_1}f'(\theta_1)-f'(\theta'_1)\right]=0.$$

Un premier moyen de solution consisterait à disposer des constantes en posant

$$AB-1=0, \quad B=\frac{1}{A}.$$

Nous aurions alors à intégrer l'équation différentielle partielle (5)

$$A\frac{d\theta}{d\theta_1}-f'(\theta_1)\frac{d\theta}{dr_1}=0,$$

ce qui se fera en posant

$$\frac{d\theta_1}{A}=-\frac{dr_1}{f'(\theta_1)}=\frac{d\theta}{0},$$

$$\theta=\text{const.}, \quad Ar_1+f(\theta_1)=\text{const.},$$

et enfin

$$\theta=\varphi[Ar_1+f(\theta_1)],$$

c'est-à-dire

$$\theta=\varphi(r);$$

ce qui est inadmissible, puisque θ et r doivent rester indépendants.

Il faut donc poser, pour satisfaire à l'équation (6),

$$\frac{f'(\theta_1)}{r_1}=\frac{f'(\theta'_1)}{r'_1}=\text{const.},$$

ce qui sera encore impossible, à moins de prendre

$$f'(\theta_1)=0, \quad f(\theta_1)=\text{const.}=C,$$

car $f'(\theta_1)$ ne renferme pas r_1 et ne saurait le faire disparaître du premier membre.

Mais alors l'équation (4) disparaissant d'elle-même, les deux autres se réduisent à

$$\frac{d\theta}{dr_1}(Ar_1+C)=\frac{d\theta'}{dr'_1}(Ar'_1+C)=\text{const.}=D,$$

$$\frac{d\theta}{d\theta_1}\left(A+\frac{C}{r_1}\right)=\frac{d\theta'}{d\theta'_1}\left(A+\frac{C}{r'_1}\right)=\text{const.}=E,$$

par suite la première surface est égale à n fois la seconde. Le rapport des aires élémentaires, étant constant, sera encore le même pour les surfaces finies; et par suite les aires des deux courbes comprises entre des rayons correspon-

---

c'est-à-dire

$$\frac{d\theta}{dr_1} = \frac{D}{A r_1 + C}, \quad \frac{d\theta}{d\theta_1} = \frac{E}{A + \frac{C}{r_1}}.$$

La première donne

$$\frac{d^2\theta}{dr_1\, d\theta_1} = 0;$$

il faut donc, pour que la seconde soit compatible avec elle, prendre

$$C = 0,$$

c'est-à-dire simplement

$$r = A r_1 \tag{7}$$

pour la valeur de r; et, quant à celle de θ, en changeant les lettres qui représentent les arbitraires

$$\frac{d\theta}{dr_1} = \frac{F}{r_1}, \quad \frac{d\theta}{d\theta_1} = G,$$

et, par suite,

$$\theta = F \log r_1 + G\theta_1 + H. \tag{8}$$

Les formules (7) et (8) font connaître la transformation la plus générale propre à conserver la propriété des courbes roulantes. Pour en déduire celle que nous avons considérée en particulier, il suffit de prendre

$$A = 1, \quad F = H = 0,$$

en laissant G arbitraire.

On peut suivre pour les courbes sphériques une analyse toute semblable. En partant des formules de la page 33

$$\varphi + \varphi' = \text{const.}, \quad \frac{\sin\varphi\, d\theta}{d\varphi} = \frac{\sin\varphi'\, d\theta'}{d\varphi'},$$

on arrivera par des calculs identiques aux suivantes :

$$\frac{d\theta}{d\varphi_1} = \frac{D}{\sin(A\varphi_1 + C)}, \quad \frac{d\theta}{d\theta_1} = \frac{E\sin\varphi_1}{\sin(A\varphi_1 + C)},$$

qu'on ne peut rendre compatibles qu'en prenant

$$C = 0, \quad A = 1,$$

c'est-à-dire

$$\varphi = \varphi_1, \tag{9}$$

dants ont pour rapport invariable le module de conversion (¹).

Ordinairement ce module est entier, la courbe génératrice est fermée, et, pour compléter le profil dérivé, on le reproduit dans les n angles égaux à $\frac{2\pi}{n}$ que l'on peut former autour d'un point. Dans ces conditions, on peut dire que le profil dérivé a la même surface que la courbe génératrice, quel que soit le module. Si donc l'économie de la matière méritait d'être prise en considération pour des pièces d'aussi peu d'importance, on voit que la dérivation n'exercerait à cet égard aucune influence et qu'elle change la forme sans modifier la quantité de substance employée.

On démontrerait de la même manière que les moments d'inertie des deux courbes, pris par rapport à l'axe de rotation, et pour des portions comprises entre des rayons correspondants, ont pour rapport constant le module de conversion, ou encore que le moment d'inertie du profil complet reste le même dans les conditions qui viennent

---

et en outre

$$\frac{d\theta}{d\varphi_1} = \frac{D}{\sin\varphi_1}, \quad \frac{d\theta}{d\theta_1} = E;$$

d'où

$$\theta = D \log \operatorname{tang} \frac{\varphi_1}{2} + E\theta_1 + F. \tag{10}$$

Les formules (9) et (10) fournissent la transformation la plus générale propre à conserver la propriété des courbes roulantes sphériques. Elles semblent renfermer une constante arbitraire de moins que les formules relatives aux courbes planes; mais il importe de se souvenir que le rayon de la sphère reste indéterminé, ce qui permet de prendre toutes les courbes semblables entre elles. Or, telle était précisément l'influence du coefficient A qui a disparu dans le cas actuel.

(¹) On peut dire aussi que, si le point décrivant parcourt la courbe proposée suivant la loi des aires, le point correspondant décrit la courbe dérivée suivant la même loi avec une vitesse aréolaire n fois moindre. Si donc une force centrale fait parcourir la première ligne, ce sera encore une force centrale qui fera décrire la courbe dérivée par le point correspondant.

d'être expliquées. Comme d'ailleurs, pour des portions quelconques, le moment d'inertie et la surface subissent la même réduction, et que le rayon de gyration ne dépend que de leur rapport, on voit aussi que ce rayon n'est pas altéré par la dérivation pour des parties correspondantes quelconques, et en particulier pour la pièce entière.

25. PROFILS DÉRIVÉS DES SECTIONS CONIQUES. — Si l'on applique ce principe à la première solution, formée de spirales logarithmiques, on retrouve d'autres spirales logarithmiques. Mais on obtient des exemples nouveaux en partant des sections coniques.

Prenons pour cela dans une demi-ellipse (*Pl. I, fig.* 11) une série de rayons vecteurs à la même distance les uns des autres, et rapprochons-les en les laissant équidistants, de manière à les faire tenir dans un angle $\frac{\pi}{n}$, qui peut rester quelconque en théorie, mais pour lequel il conviendra, dans l'application, de prendre n entier. Puis répétons le tracé ainsi obtenu dans les $2n$ angles égaux que l'on peut former autour d'un point. Nous obtiendrons par là une courbe sinueuse qui présentera n saillies et n rentrants.

Le mécanisme sera formé de deux courbes égales installées autour de leurs pôles, avec un espacement égal au grand axe de l'ellipse génératrice. Les rapports limites et l'irrégularité conserveront la même expression que pour le tracé elliptique (20); mais on aura dans chaque tour, et pour chaque pièce, n maxima et n minima de vitesses, qui se correspondront inversement.

Si on représente par

$$f(r, \theta) = 0$$

l'équation polaire de la courbe génératrice rapportée à son centre de rotation et à l'axe choisi pour l'opération, l'équa-

tion de la courbe dérivée sera évidemment

$$f(r, n\theta) = 0.$$

Si l'on considère en particulier les profils dérivés de l'ellipse, ils auront d'après cela pour équation

$$r = \frac{p}{1 - e\cos n\theta}.$$

On peut, à l'aide de cette formule, vérifier pour ces courbes les propriétés suivantes, dont je supprime, pour abréger, les démonstrations qui sont étrangères à notre sujet :

Elles sont les transformées par développement des sections planes d'un cône de révolution (1) ;

Elles sont encore les trajectoires d'un mobile libre sollicité par une force centrale dont l'intensité est, suivant la loi de Clairaut, la somme de deux termes qui varient en raison inverse du carré et du cube de la distance (2) ;

Elles sont enfin les directrices propres à représenter la loi des aires dans les planétaires (3).

§ IV.

MÉTHODE D'EULER.

26. Méthode générale. — On peut formuler une méthode générale pour trouver une infinité de solutions au problème des courbes roulantes, soit planes, soit sphériques ; nous chercherons pour cela la courbe conjuguée

(1) Leroy, *Géométrie descriptive*, 1834, p. 132.

(2) Haton de la Goupillière, *Thèses de Doctorat*, p. 17 ; chez Mallet-Bachelier, 1857.

(3) *Voyez* plus loin (140).

d'une première ligne donnée arbitrairement par son équation en coordonnées polaires :

$$r = f(\theta).$$

Si nous désignons par r', θ' les coordonnées de la seconde courbe, nous aurons, d'après les formules fondamentales (3),

$$r \pm r' = \Delta,$$
$$\pm r' = \Delta - r = \Delta - f(\theta),$$

avec

$$\omega r = \omega' r'.$$

Cette dernière devient, en multipliant ses deux membres par le temps dt,

$$r\,d\theta = r'\,d\theta',$$
$$d\theta' = \frac{r}{r'}\,d\theta = \pm\frac{f(\theta)}{\Delta - f(\theta)}\,d\theta,$$
$$\theta' = \pm\int\frac{f(\theta)}{\Delta - f(\theta)}\,d\theta.$$

Quant à la constante arbitraire, elle n'introduit aucune généralité, car elle correspond seulement au déplacement de l'axe polaire. Il ne reste plus, après l'intégration, qu'à éliminer le paramètre θ entre les valeurs de r' et θ'.

S'il s'agit de courbes sphériques, on se donnera la première par son équation

$$\varphi = f(\theta)$$

entre la colatitude φ et la longitude θ. On invoquera ensuite les équations fondamentales (3)

$$\varphi + \varphi' = \alpha, \quad \omega \sin\varphi = \omega' \sin\varphi',$$

qui conduiront, par une marche identique, aux deux formules

$$\varphi' = \alpha - f(\theta),$$
$$\theta' = \int\frac{\sin f(\theta)}{\sin[\alpha - f(\theta)]}\,d\theta,$$

entre lesquelles il restera à éliminer le paramètre θ.

27. Exemple. — Il serait facile de retrouver par cette voie les solutions que nous avons déjà étudiées; mais il sera préférable d'utiliser cette méthode pour en déduire une nouvelle combinaison. Nous chercherons pour cela une paire de courbes telles, que, le mouvement de l'une étant uniforme, la projection de la rotation de la seconde sur la ligne des centres soit elle-même uniforme (1).

Cherchons d'abord l'équation de la première courbe qu'il faut employer à cet effet. Si nous désignons pour cela par ω la vitesse angulaire de la rotation irrégulière dont la projection doit être uniforme, ωR sera la vitesse à la distance R, et $\omega R \sin\theta$ sa composante suivant la direction fixe pour le point qui en est écarté de l'angle θ.

La vitesse angulaire de la rotation régulière sera, de son côté,

$$\omega \frac{r}{r'} = \omega \frac{r}{\Delta - r}.$$

Comme d'ailleurs ces deux mouvements doivent être uniformes, leurs vitesses sont proportionnelles aux espaces correspondants $2R$ et π, qui sont décrits simultanément pour un demi-tour. On a donc

$$\frac{R\omega \sin\theta}{2R} = \frac{\omega \dfrac{r}{\Delta - r}}{\pi}.$$

Telle est entre r et θ l'équation de la courbe de rotation irrégulière. Il vient, en la résolvant par rapport à r,

$$r = \Delta . \frac{\pi \sin\theta}{\pi \sin\theta + 2}.$$

---

(1) Ces profils peuvent servir à mettre en rapport une manivelle uniforme et une tige dont on veut aussi rendre le mouvement uniforme. On les relierait, à cet effet, au moyen d'une bielle, dont nous négligerons l'obliquité, et d'un arbre intermédiaire sur lequel serait installée la seconde came.

Adoptant maintenant cette équation comme point de départ, il reste à lui appliquer la méthode d'Euler. Nous aurons pour cela, en invoquant la formule générale,

$$\theta' = \int \frac{r}{\Delta - r} d\theta = \frac{\pi}{2} \int \sin\theta d\theta = \frac{\pi}{2}(1 - \cos\theta).$$

Nous avons vu que la valeur de la constante est indifférente. Je la détermine dans l'équation précédente de manière que θ et θ' s'annulent ensemble. De cette manière, les deux axes polaires se trouvent placés dans le prolongement l'un de l'autre pour la position initiale.

Nous avons, en second lieu,

$$r' = \Delta - r = \Delta\left(1 - \frac{\pi\sin\theta}{\pi\sin\theta + 2}\right) = \frac{2\Delta}{\pi\sin\theta + 2}.$$

Il reste alors à éliminer θ.

Pour y arriver, nous tirerons de ces deux formules

$$\cos\theta = 1 - \frac{2\theta'}{\pi},$$

$$\sin\theta = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\Delta}{r'} - 1\right),$$

ce qui donne, en ajoutant les carrés et supprimant les accents,

$$\left(1 - \frac{2\theta}{\pi}\right)^2 + \frac{4}{\pi^2}\left(\frac{\Delta}{r} - 1\right)^2 = 1.$$

Telle est l'équation de la courbe dont la rotation est uniforme.

Pour la mettre sous sa forme définitive, résolvons-la par rapport à r; il viendra

$$r = \frac{\Delta}{1 + \sqrt{\theta(\pi - \theta)}}.$$

Nous ne devons prendre pour le radical que le signe positif,

car d'après la manière dont nous avons choisi, dans la formule d'Euler, le double signe, le contact a lieu entre les centres, et par suite r est moindre que Δ. On voit, du reste, que cette valeur sera réelle lorsque θ variera de zéro à π, c'est-à-dire pendant un demi-tour, ce qui suffit; car, pour le reste de la révolution, le mouvement rectiligne doit nécessairement changer de sens, ce qui conduit à compléter le profil en reproduisant symétriquement le même tracé.

Ce mécanisme est représenté sur la *fig.* 12, *Pl. I.* La courbe de rotation irrégulière est formée de deux boucles, et la ligne de rotation uniforme présente deux rebroussements.

On peut encore appliquer à cette nouvelle solution le principe général de transformation que nous avons indiqué ci-dessus (23). Nous obtiendrons par là une série d'autres combinaisons représentées par les formules

$$r = \Delta \frac{\pi \sin n\theta}{\pi \sin n\theta + 2},$$

$$r = \frac{\Delta}{1 + \sqrt{n\theta(\pi - n\theta)}};$$

mais je ne m'arrêterai pas à les discuter en détail.

CHAPITRE III.

GLISSIÈRES.

§ I.

GÉNÉRALITÉS.

28. Nous comprenons sous la dénomination de *glissières* les organes de contact immédiat et de glissement simple (XXV).

Deux corps peuvent se toucher par un point, une ligne ou une superficie finie. Il ne pouvait être question de ce dernier mode de contact pour des surfaces roulantes, car nous avons reconnu qu'il était alors impossible que tous les points de contact ne fussent pas situés sur une même ligne droite. On peut, au contraire, pour les glissières, le réaliser sous des conditions bien déterminées, comme nous allons le faire voir. Dès lors, les raisons qui nous faisaient préférer le contact par une ligne à celui qui s'effectue par un point (2) assignent la préférence définitive au contact par une étendue finie.

Cela est d'autant plus important qu'on se trouverait toujours ramené par la force des choses à ce mode de contact. En effet, le glissement simple s'effectuant toujours par le même point de la surface glissante (XXII), l'usure ne tarderait pas à former en cet endroit un méplat, véritable surface finie. Seulement cette facette, fruit du hasard, serait évidemment placée dans de mauvaises conditions, et il importe, au contraire, de discuter d'avance la nature géométrique des glissières.

Cette objection perd sa valeur pour les organes dont le

mouvement est mixte, car ce glissement se combine alors avec un roulement qui déplace incessamment le point de contact, et ne permet pas la formation d'un méplat en un endroit déterminé. Il se produit, au contraire, une usure générale qui conserve la continuité du contour tout en le modifiant légèrement.

29. Une surface quelconque peut toujours servir à mouler deux corps, l'un en plein, l'autre en creux, de manière qu'ils s'emboîtent parfaitement. Mais il arrivera ordinairement que ces deux corps seront dans l'impossibilité de jouer l'un par rapport à l'autre. Il faut, pour que ce mouvement soit possible, avoir égard à des conditions très-précises que je vais indiquer.

Supposons trouvées deux surfaces S, S′ capables de glisser l'une sur l'autre. Considérons un point M de S. Comme cette surface est en glissement simple, M restera constamment au contact de S′, et y tracera une certaine ligne L. Une petite étendue de S, prise autour de M, pourra donc s'adapter exactement sur une série de petites calottes prises de même autour de tous les points de L; d'où il suit que toutes ces calottes sont superposables entre elles. Il y a donc identité de la surface S avec elle-même tout le long de la ligne L, et par suite identité de cette ligne d'un bout à l'autre.

Or, la Géométrie ne nous présente que trois lignes qui soient superposables à elles-mêmes dans toute leur étendue: la *droite*, le *cercle*, l'*hélice*. Comme d'ailleurs ces lignes seront tracées par chaque point de S sur la surface S′, il s'ensuit que cette dernière est sillonnée par une série de semblables lignes, et qu'on peut la considérer comme engendrée par elles. On ne pourra donc employer comme glissières que des surfaces formées par des droites, des cercles ou des hélices.

Nous venons d'ailleurs de reconnaître que ces lignes doivent être les trajectoires des différents points du solide glissant, leur disposition mutuelle ne peut donc être laissée quelconque. On peut, à cet égard, employer les trois types suivants dans lesquels rentrent toutes les pièces de machines animées d'un glissement simple.

PREMIÈRE CATÉGORIE. — *Glissières cylindriques.*

SECONDE CATÉGORIE. — *Glissières de révolution.*

TROISIÈME CATÉGORIE. — *Glissières héliçoïdales.*

30. GLISSIÈRES CYLINDRIQUES. — Une première catégorie dérive de la ligne droite. Elle est formée de surfaces cylindriques à base quelconque, polygonale, curviligne ou mixtiligne.

Les deux pièces sont animées, comme mouvement relatif, d'une translation rectiligne parallèle aux génératrices. Celles-ci deviendront en effet, par là, les trajectoires relatives, qui seront des droites glissant suivant elles-mêmes.

On réalise ces surfaces dans la pratique au moyen du rabot mécanique.

GLISSIÈRES DE RÉVOLUTION. — Une deuxième catégorie dérive du cercle. Elle est formée de surfaces de révolution à méridienne quelconque, polygonale, curviligne ou mixtiligne.

Les deux pièces sont animées, comme mouvement relatif, d'une rotation autour de leur axe de figure. Les parallèles deviendront en effet, par là, les trajectoires relatives, qui seront des cercles glissant suivant eux-mêmes.

On réalise ces surfaces dans la pratique au moyen du tour.

GLISSIÈRES HÉLIÇOÏDALES. — Une troisième catégorie dérive de l'hélice. Elle est formée de surfaces héliçoïdales à profil quelconque, polygonal, curviligne ou mixtiligne.

Les deux pièces sont animées, comme mouvement relatif,

d'un mouvement héliçoïdal autour de leur axe de figure et avec leur pas. Les hélices de la surface deviendront en effet, par là, les trajectoires relatives, qui seront des hélices glissant suivant elles-mêmes.

On réalise ces surfaces dans la pratique au moyen de la machine à fileter.

31. GLISSIÈRES A DOUBLE EFFET. — Il n'est pas inutile de remarquer en passant un petit nombre de surfaces qui, par leur mode de génération, peuvent être considérées comme des glissières à plusieurs points de vue différents.

En premier lieu le *plan*. On peut l'envisager comme un cylindre dont la direction reste indéterminée, pourvu qu'elle soit parallèle au plan lui-même. Un plan pourra donc glisser sur un autre dans tous les sens. C'est pour cette raison que nous avons eu lieu de considérer une théorie du mouvement plan (VIII). Cette propriété du plan est utilisée pour le polissage des glaces, le frottage des parquets, la porphyrisation des matières soumises à l'analyse chimique, etc.

En second lieu la *sphère*. Elle peut être considérée comme une surface de révolution dont l'axe reste indéterminé, pourvu qu'il passe par le centre. Une sphère pourra donc glisser dans une autre dans tous les sens. C'est pour cette raison que nous avons eu également à considérer une théorie du mouvement sphérique (X). Cette propriété de la sphère est utilisée dans la construction des *genoux* ou *joints à la Cugnot*, qui servent pour la suspension d'appareils de topographie, pour les articulations des mannequins d'atelier, etc.

En troisième lieu le *cylindre de révolution*. Il peut être considéré, soit comme un cylindre, soit comme une surface de révolution. Un cylindre de révolution pourra donc glisser dans un autre en exécutant des rotations autour de

l'axe, et des translations parallèles à cet axe indépendantes les unes des autres. Pour cette raison, nous aurions pu considérer une théorie du mouvement cylindrique, mais elle aurait formé un cas particulier du mouvement héliçoïdal (XIII) sans rien offrir de particulier qui lui méritât d'être formulée à part. Cette propriété du cylindre de révolution est utilisée dans les bouchons de bouteille, dans les œillets au travers desquels on fait passer, pour les guider, les tiges de sondage animées de rotation et de translation indépendantes, etc.

32. Il se présentera, dans la composition des machines, deux cas distincts pour l'emploi des glissières, comme, du reste, pour celui de toutes espèces d'organes : ou bien le mouvement absolu de l'une des pièces sera le mouvement relatif nécessaire à la constitution de l'organe, et que nous avons spécifié pour chaque catégorie; dès lors la seconde se trouvera au repos (XXI) et on aura une *glissière-guide;* ou bien le mouvement absolu de l'une des pièces sera différent du mouvement relatif en question; il sera dès lors impossible que la seconde reste au repos : elle prendra donc nécessairement un certain mouvement absolu, et on aura une *glissière-transmission*. Cette distinction s'observe très-nettement dans les exemples suivants.

§ II.

EXEMPLES.

33. GLISSIÈRES CYLINDRIQUES. — GLISSIÈRES-GUIDE. — *Glissière de locomotives.*—Une pièce rectangulaire, appelée *coquille*, est prise entre deux longrines et munie de rebords pour empêcher le mouvement transversal (*Pl. V, fig. 79*). Elle sert à guider en ligne droite la tige d'un piston.

34. *Boîte à étoupes.* — Cet organe, appelé aussi *stuffing-box* (*Pl. V, fig.* 80), permet un passage étanche de la tige d'un piston à travers le fond d'un cylindre qui renferme un fluide, différant de l'atmosphère soit par sa nature, soit par son degré de condensation ou de raréfaction.

On pratique pour cela un orifice un peu plus grand que la section de la tige, pour permettre la dilatation et les jeux accidentels. La fermeture est maintenue par de l'étoupe imprégnée d'huile, corps compressible et élastique.

35. GLISSIÈRES-TRANSMISSION. — *Presse de relieur.* — On serre par l'effet de coups violents appliqués sur la tête d'un coin, et on dépresse par un léger coup sur la tête du contre-coin (*Pl. V, fig.* 81).

36. GLISSIÈRES DE RÉVOLUTION. — GLISSIÈRES-GUIDE. — *Palier.* — Le palier sert d'appui aux arbres horizontaux (*Pl. V, fig.* 82). A cet effet, le tourillon qui fait partie de l'arbre est pris entre deux coussinets qui ont un rayon de courbure légèrement supérieur, pour éviter que le tourillon ne soit pincé par la dilatation. On donne également à leur contour un peu moins que la demi-circonférence, pour qu'ils ne portent pas l'un sur l'autre et qu'on puisse serrer à volonté le tourillon à l'aide des boulons. Les coussinets sont munis de rebords pour empêcher la translation parallèle à l'axe. Ils sont pris entre le chapeau et la semelle du palier. Celle-ci enfin est boulonnée, soit sur le sol, soit sur une console fixée à un mur ou à un plafond.

37. *Crapaudine.* — La crapaudine sert d'appui au point inférieur d'un arbre vertical (*Pl. V, fig.* 83). A cet effet le pivot qui termine l'arbre porte sur une pièce à laquelle on donne, pour des raisons qui tiennent au frottement (365), une forme convexe, dite *en goutte de suif*. Cette pièce n'est pas à demeure, on la remplace quand elle

est usée. Elle est renfermée dans une boîte que l'on installe avec précision dans l'axe de l'arbre et à la hauteur convenable, au moyen de quatre vis calantes horizontales et d'une cinquième verticale.

38. *Cheville-ouvrière.* — Elle sert de pivot à l'avant-train d'une voiture pour jouer par rapport à l'arrière-train. Elle se réduit simplement à deux couronnes circulaires qui glissent l'une sur l'autre (365).

39. *Collier à étoupes.* — Le collier à étoupes sert de guide aux points intermédiaires des arbres verticaux. On les installe à la traversée des planchers. Ils présentent la même disposition que la boîte à étoupes (*Pl. V, fig.* 80). On voit ainsi ce dispositif figurer à la fois comme glissière rectiligne ou circulaire, d'après la propriété que nous avons reconnue au cylindre de révolution (31).

40. GLISSIÈRES-TRANSMISSION. — *Articulation.* — L'articulation ou tête-de-bielle réunit par leur extrémité deux pièces qui doivent fonctionner comme les côtés d'un angle d'ouverture variable dont elle marque le sommet (*Pl. V, fig.* 84). A cet effet, l'une de ces pièces porte un tourillon et l'autre tout le reste du mécanisme : en premier lieu, deux coussinets disposés comme dans le palier. Ils sont pris dans une pince et celle-ci maintenue et pressée contre le corps de la pièce par une clef et sa contre-clef. On appelle ainsi deux trapèzes dont les angles sont égaux et alternes-internes, et par suite les bords parallèles. Ce parallélisme détermine un serrage dans le sens même des pièces, tandis que l'emploi d'un seul trapèze développerait une poussée oblique à l'une d'elles. Quant au serrage lui-même, il provient de ce que la fente de la pince est un peu trop grande du côté du tourillon, tandis que celle de la pièce laisse de même un jeu du côté opposé, de sorte que ces deux solides

éprouvent de la part des clefs une tendance à venir l'un au-devant de l'autre.

41. *Excentrique circulaire à collier.* — On y distingue le noyau d'excentrique qui est un cylindre assujetti à tourner autour d'une ligne autre que son axe de figure, d'où vient le nom d'*excentrique*, et la bague ou collier qui l'environne (*Pl. V, fig.* 85). Cette dernière pièce se prolonge par un appendice appelé bielle d'excentrique, et sur le rôle duquel nous reviendrons plus tard (160).

42. GLISSIÈRES HÉLIÇOÏDALES. — GLISSIÈRES-GUIDE. — *Écrou.* — On appelle écrou un solide qui présente en creux la forme d'une vis pleine mobile à son intérieur et dont il assure le mouvement héliçoïdal. On en rencontre dans la presse à vis, dans la machine à fileter et dans une foule d'autres circonstances.

43. *Double vis des freins.* — Les vis dont le pas est notable sont dites *rapides*, parce qu'un moindre nombre de tours les fait avancer d'une quantité donnée. Les vis dont le pas est faible sont dites *puissantes*, en ce qu'une moindre force appliquée à la circonférence surmonte une résistance donnée. Les vis des freins de chemins de fer devraient réunir ces deux avantages, car il faut amener rapidement le frein au contact quand un danger se présente, et lutter énergiquement contre la vitesse du train. On a proposé pour cela l'artifice suivant.

Une vis rapide A joue à frottement doux dans un écrou B. Celui-ci est fileté en vis lente à l'extérieur et joue à frottement dur dans un écrou fixe C. Si on tourne à vide, la plus faible des deux résistances est vaincue la première; la vis à frottement doux A joue donc dans la pièce B, et, comme elle est rapide, on ne perd pas de temps pour l'approche. Une fois au contact, on éprouve une résistance que la vis rapide

ne permet plus de vaincre avec la puissance qui a été mise en jeu jusque-là. Elle n'avance donc plus. En augmentant alors l'effort, on atteint la limite du frottement dur, et la pénétration très-faible que permet l'élasticité des substances mises en presse se fait par l'intermédiaire de la vis B jouant à l'intérieur de l'écrou C, c'est-à-dire avec une grande énergie.

44. GLISSIÈRES-TRANSMISSION. — *Foret à vis.* — L'ouvrier appuie la tête de l'outil sur sa poitrine et la pointe ou mèche sur la pièce à percer (*Pl. VI, fig.* 86). Il imprime avec la main une translation à l'écrou, et comme le mouvement relatif des deux pièces ne peut être qu'héliçoïdal, le corps de l'outil prend une rotation très-rapide.

45. *Vis différentielle de Prony.* — Un noyau porte à la fois deux vis de même sens et de pas très-peu différents (*Pl. VI, fig.* 87). L'écrou de l'une est fixe et l'autre mobile. Pour un tour la vis se meut dans l'espace du pas de l'écrou fixe. Elle s'avance d'ailleurs, relativement à l'écrou mobile et du même côté, du propre pas de ce dernier, ce qui veut dire que celui-ci rétrograde par rapport à la vis d'une quantité égale à son pas. Il s'est donc déplacé dans l'espace de la différence des deux pas, c'est-à-dire d'une très-faible quantité. Tel est le but de tous les appareils qu'on appelle *différentiels* et dont nous rencontrerons encore d'autres exemples.

Le *tendeur d'attelage* des wagons présente la même disposition (*Pl. VI, fig.* 88), avec cette différence que les deux vis sont en sens contraires et que les écrous se rapprochent pour un tour de la somme des deux pas.

CHAPITRE IV.

EXCENTRIQUES A RAINURE.

§ I.

RAINURES RECTILIGNES.

46. Nous comprenons sous la dénomination d'*excentriques* les organes de contact immédiat et de glissement mixte; ceux, du moins, dans lesquels le frottement joue un rôle assez faible pour qu'on puisse ne pas s'en préoccuper et employer dans une étendue notable les contours fournis par la théorie (XXV).

Nous diviserons l'étude des excentriques en trois sections :

Première catégorie. — *Excentriques à rainure.*

Deuxième catégorie. — *Excentriques à cadre perpendiculaire.*

Troisième catégorie. — *Excentriques à cadre circonscrit.*

Ces appareils, assez dissemblables pour leur aspect extérieur, remplissent des rôles équivalents et ne sont séparés que par des nuances qui ne doivent pas nous empêcher d'en composer une même classe.

Excentriques a rainure. — Les excentriques à rainure sont des appareils dont l'une des pièces porte un point en saillie ou bouton, et l'autre une courbe en creux ou rainure. Le bouton est engagé dans la rainure sans pouvoir la quitter. Il ne peut donc que la parcourir d'un bout à l'autre.

On voit par là que la trajectoire relative du bouton n'est autre que la rainure. Elle devient la trajectoire absolue dans le cas particulier où la pièce à rainure fonctionne comme guide.

Comme la ligne la plus simple est la ligne droite, nous établirons un premier genre pour les rainures rectilignes.

47. RAINURES RECTILIGNES. — *Renvoi de translation.* Dans cet organe (*Pl. VI, fig.* 89) les deux pièces sont des tiges animées de translations dans leur propre sens. La transmission est uniforme. En effet, les portions parcourues par les tiges sont toujours interceptées par des positions parallèles de la rainure. Elles sont par suite dans le rapport inverse des sinus des angles que chacune d'elles fait avec la rainure ; et ces angles sont constants.

48. *Renvoi de rotation.* — Dans le rabot Withworth (*Pl. VI, fig.* 90), les deux pièces sont animées de rotations dont l'une, celle de la roue, est continue et uniforme, et l'autre, celle de la rainure, alternative et irrégulière.

On voit d'abord que l'oscillation dans un sens et celle du sens opposé correspondront aux deux arcs embrassés par les tangentes issues du centre de rotation de la rainure, et s'effectueront par suite dans des temps inégaux. Cette irrégularité rend l'emploi de ce renvoi avantageux dans le rabot à simple effet.

Les limites du rapport des vitesses angulaires correspondront évidemment aux instants où la rainure se trouve disposée suivant la ligne des centres. Dans un intervalle infiniment petit, le bouton parcourt un élément perpendiculaire à cette ligne, qui peut être considéré comme un arc de cercle décrit indifféremment autour de chacun des centres avec les rayons r et $\Delta \pm r$, si r désigne le rayon de la rotation du bouton et Δ la distance des centres. Les li-

mites du rapport des vitesses seront donc

$$\frac{r}{\Delta + r}, \quad \frac{r}{\Delta - r},$$

le rapport du minimum au maximum

$$\frac{\Delta - r}{\Delta + r},$$

et la différence qui le sépare de l'unité, c'est-à-dire l'irrégularité de la transmission,

$$\frac{2r}{\Delta + r}.$$

49. *Réglette de Nicomède.* — Nicomède, géomètre de l'antiquité, avait été conduit, pour résoudre le problème de la trisection de l'angle, à la considération de la courbe appelée *conchoïde*, qui s'engendre en portant à partir d'une droite et sur tous les rayons menés par un point une longueur constante. Il avait imaginé en même temps pour la tracer une règle à rainure rectiligne figurant le rayon vecteur et qu'on faisait tourner autour du point fixe (*Pl. VI, fig.* 91), tandis qu'une réglette engagée dans la rainure décrivait par une de ses extrémités la droite et par l'autre la conchoïde.

Une combinaison analogue se trouve aujourd'hui réalisée sur une grande échelle dans la *machine oscillante de Cavé* (*Pl. VI, fig.* 92). Le cylindre et la cage qui le surmonte forment la rainure, le piston et sa tige jouent le rôle de la réglette et décrivent dans l'espace des conchoïdes de cercle.

Ce mécanisme peut servir également à la reproduction à un grand nombre d'exemplaires d'une ligne quelconque par le moyen d'une de ses conchoïdes. On peut, pour cela, tracer la conchoïde qui sert de guide, à l'aide de l'appareil lui-même, en transposant pour une seule fois la pointe sèche et la pointe traçante.

On peut encore la construire par points d'après la défi-

nition, et tracer pour chacun d'eux sa tangente. La réglette est, en effet, une figure plane dont le mouvement élémentaire admet un centre instantané déterminé par l'intersection de deux normales simultanées (VIII). L'une d'elles sera la normale MΩ de la courbe proposée (*Pl. I, fig.* 14), car le point M est assujetti à la suivre. Quant à l'autre, ce sera la perpendiculaire OΩ élevée par le point fixe sur le rayon vecteur. En effet, le point de la règle qui se trouve actuellement en O se déplace pour un mouvement élémentaire suivant ce rayon, car s'il s'en écartait ce serait d'une quantité que l'on peut assimiler à un arc de cercle de rayon et d'angle infiniment petits. Ce déplacement serait donc du second ordre ou négligeable. Le centre instantané étant en Ω, ΩN sera la normale de la conchoïde décrite par le point N.

On voit, d'après cela, que toutes les normales des conchoïdes décrites par les différents points du rayon vecteur passent par un même point situé sur la perpendiculaire élevée par le pôle sur le rayon vecteur. En d'autres termes, toutes les conchoïdes d'une même courbe ont en coordonnées polaires la même sous-normale.

30. *Réglette de La Condamine.* — Si on ne trouve pas parmi toutes les conchoïdes une ligne convenable pour fonctionner comme guide en raison des sinuosités, des nœuds, etc., qu'elles présentent, on peut encore se servir pour tracer la courbe, non plus d'un point du rayon vecteur, mais d'un point extérieur qui lui soit lié invariablement (*Pl. VI, fig.* 93). La rainure-guide n'est plus alors la conchoïde de la courbe à reproduire, elle en est la *rosette,* suivant le terme consacré dans les arts. On peut encore la tracer mécaniquement à l'aide de l'instrument lui-même, en plaçant inversement la pointe traçante à l'extrémité de la potence et la pointe sèche sur la courbe à reproduire.

On peut aussi la construire par points (*Pl. I, fig.* 15). Pour cela, on mènera par le point O un rayon vecteur quelconque OA, une droite AB sous l'inclinaison et avec la longueur de la potence, une parallèle BC à OA jusqu'à la rencontre de la courbe proposée xy, une parallèle CD à AB jusqu'à son intersection D avec OA, enfin une longueur DE égale à la réglette. On obtient par là un point E qui appartient à la rosette, car il est évident que EDC offre la figure de la potence, et que, d'un autre côté, la réglette passe par le point O en s'appuyant sur la courbe proposée en C.

On peut encore obtenir la tangente de cette rosette. En effet, le centre instantané se trouve, d'après ce que nous avons dit, en Ω, à l'intersection de la normale CΩ à la courbe proposée que décrit le point C et de la perpendiculaire OΩ au rayon vecteur. On aura donc la normale à la rosette pour le point E en le joignant à Ω.

§ II.

PLATEAU OU CONE A RAINURE.

51. Les excentriques à rainure courbe servent ordinairement à relier un corps tournant à un autre corps en translation que nous appellerons la *tige*. Il peut, dès lors, se présenter trois cas, suivant que l'axe est perpendiculaire, oblique ou parallèle à la tige. On dispose alors sur le corps tournant un plateau, un cône ou un cylindre.

Le premier cas se subdivise en deux autres, car on peut mettre la rainure sur le plateau ou sur la tige. Quant à la théorie des rainures coniques, on la fera rentrer dans la précédente en supposant que l'on enroule sur le cône la courbe plane tracée sur le plateau.

Nous formerons, d'après cela, trois nouveaux genres :

SECOND GENRE. — *Plateau ou cône à rainure* (*Pl. VI, fig.* 94 *et* 95).

TROISIÈME GENRE. — *Tige à rainure* (*Pl. VI, fig.* 96).

QUATRIÈME GENRE. — *Cylindre à rainure* (*Pl. VI, fig.* 97).

52. PLATEAU OU CONE A RAINURE. — Nous pouvons toujours supposer la rotation uniforme, car il suffit de considérer la variation du rapport des vitesses :

$$\theta = \omega t.$$

La loi de la translation

$$h = f(t)$$

sera déterminée par la variation de la distance du bouton au centre du plateau ou au sommet du cône, c'est-à-dire par celle du rayon vecteur de la courbe plane ou de sa transformée par développement. Nous ferons donc

$$h = r,$$

et l'équation de la rainure deviendra

$$r = f\left(\frac{\theta}{\omega}\right).$$

53. EXEMPLE I. — *Repos.* — Si on veut réaliser des intervalles de repos, on devra poser

$$h = \text{const.},$$

d'où

$$r = \text{const.}$$

La rainure est donc un arc de cercle concentrique au plateau ou un parallèle du cône.

EXEMPLE II. — *Transmission uniforme.* — Les équa-

tions seront

$$h = vt, \quad r = \frac{v}{\omega}\theta.$$

La rainure est donc une spirale d'Archimède (1).

Exemple III. — *Transmission sinusoïdale.* — Nous désignerons, pour abréger, sous ce nom un mouvement très-doux et fréquemment employé qui est représenté par l'équation

$$h = R \sin \omega t,$$

d'où nous déduisons

$$r = R \sin \theta.$$

La rainure est donc un cercle qui passe par le centre de rotation.

§ III.

TIGE A RAINURE.

54. Nous supposons toujours la rotation uniforme

$$\theta = \omega t$$

et nous admettrons que la rainure passe par le point A (*Pl. I, fig.* 16), ce qui ne particularise en rien, car on peut la supposer élevée ou abaissée à volonté le long de la tige. Dans ces conditions, quand le bouton qui décrit un cercle se trouve en N, si l'on veut que la tige se soit abaissée d'une longueur

$$h = f(t),$$

il faut porter celle-ci en NM pour obtenir le point corres-

(1) On a aussi employé la spirale pour faire mouvoir, non plus une tige, mais une roue dont les dents s'engagent successivement dans les spires de cette rainure. Le pas de la roue est alors égal au pas constant de la spirale, et un tour entier du plateau ne fait passer qu'une dent de la roue.

pondant M de la rainure dans la position initiale. L'ordonnée sera donc

$$y = h + \sqrt{R^2 - x^2};$$

quant à l'abscisse, elle a pour valeur

$$x = R \sin \theta.$$

En éliminant h, t et θ, nous obtiendrons l'équation de cette rainure,

$$y = \sqrt{R^2 - x^2} + f\left(\frac{1}{\omega} \arcsin \frac{x}{R}\right).$$

Dans cette formule les fonctions sont bien déterminées; le radical est positif et l'arc-sinus est pris dans le premier quadrant du cercle trigonométrique. Au delà du point B ces restrictions seraient remplacées par d'autres, mais la partie ainsi obtenue suffit, car on la reproduit toujours dans les quatre angles pour la symétrie des deux parties du mouvement direct et du retour.

55. Exemple I. — *Repos.* — En posant

$$h = 0,$$

il vient

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}.$$

La rainure est donc un arc du cercle lui-même.

Exemple II. — *Transmission uniforme.* — Nous choisirons pour plus de simplicité la constante de manière qu'un demi-tour corresponde à une translation égale au diamètre

$$h = \frac{2\omega R}{\pi} t;$$

il vient, d'après cela,

$$y = \sqrt{R^2 - x^2} + \frac{2R}{\pi} \arcsin \frac{x}{R}.$$

La rainure est donc une courbe en forme de 8 (*Pl. VI, fig.* 96) sur laquelle je ne m'arrêterai pas, parce qu'elle est sans intérêt.

EXEMPLE III. — *Transmission sinusoïdale.* — Si nous posons

$$h = \mathrm{R} \sin \omega t,$$

nous en déduirons

$$y = \sqrt{\mathrm{R}^2 - x^2} + \mathrm{R} \sin\left[\omega \left(\frac{1}{\omega} \arcsin \frac{x}{\mathrm{R}}\right)\right],$$

c'est-à-dire

$$y = \sqrt{\mathrm{R}^2 - x^2} + x.$$

La rainure sera donc un arc d'ellipse. La portion comprise dans le premier quadrant passe à l'origine à 45 degrés (*Pl. I, fig.* 17) et retombe verticalement sur l'axe des abscisses. Si on reproduit cet arc dans les quatre angles, on obtient la figure d'un 8 qui présente au premier aspect une ressemblance avec la *lemniscate* de Bernoulli.

EXEMPLE III *bis.* — *Second mouvement sinusoïdal.* — Si dans la sinusoïde, courbe serpentante bien connue, on prend la portion comprise entre deux inflexions en passant par un sommet, on obtient l'équation précédente. Si au contraire on considère l'arc compris entre deux sommets en passant par une inflexion, l'équation qui le représente prend la forme

$$h = -\mathrm{R} \cos \omega t,$$

qui ne diffère de la précédente que par le déplacement de l'origine. Comme cet arc se compose, de même que le précédent, de deux parties symétriques, la loi de mouvement qu'il représente peut encore être convenablement employée dans les mécanismes. Mais la rainure correspondante est très-différente de la précédente. Il vient, en effet, en effec-

tuant la transformation :

$$y = \sqrt{R^2 - x^2} - R\cos\left[\omega\left(\frac{1}{\omega}\operatorname{arc\,sin}\frac{x}{R}\right)\right]$$

$$= \sqrt{R^2 - x^2} - R\sqrt{1 - \sin^2 \operatorname{arc\,sin}\frac{x}{R}}$$

$$= \sqrt{R^2 - x^2} - R\sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}},$$

et enfin

$$y = 0.$$

La rainure est donc une ligne droite perpendiculaire à la tige (*Pl. VI, fig.* 98). Ce système est très-employé, quoiqu'il présente une certaine dureté.

§ IV.

CYLINDRE A RAINURE.

56. Nous continuons à supposer la rotation uniforme

$$\theta = \omega t.$$

La loi de la translation

$$h = f(t)$$

sera déterminée par la variation de la hauteur du bouton au-dessus du plan de la section droite, c'est-à-dire de l'ordonnée de la rainure. Nous ferons donc

$$h = z.$$

On a d'ailleurs entre les coordonnées horizontales la relation

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{y}{x}.$$

Si on élimine maintenant h, t et θ, on obtient l'équation de la rainure

$$z = f\left(\frac{1}{\omega}\operatorname{arc\,tang}\frac{x}{y}\right)$$

qu'il faut joindre à l'équation du cylindre toujours la même

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

57. Exemple I. — *Repos.* — Si nous faisons

$$h = \text{const.},$$

il vient

$$z = \text{const.},$$

équation d'un plan horizontal. La rainure est donc un arc de section droite.

Exemple II. — *Transmission uniforme.* — Nous posons

$$h = \omega t,$$

il vient alors

$$z = \frac{\omega}{\omega} \text{ arc tang } \frac{y}{x},$$

équation d'un héliçoïde à plan directeur. La rainure est donc une hélice.

Ce système a été appliqué notamment par M. Withworth à un rabot mécanique à double effet, afin d'obtenir que l'outil se retourne sur lui-même aux extrémités de la course pour travailler dans les deux sens. Dans ce but on le munit d'un cylindre à rainure héliçoïdale, et on place aux extrémités du parcours un arrêt qui s'engage dans la rainure et détermine ainsi la rotation du cylindre.

Exemple III. — *Transmission sinusoïdale.* — En posant

$$h = m R \sin \omega t,$$

on en déduit

$$z = m R \sin \left[\omega \left(\frac{1}{\omega} \text{ arc tang } \frac{y}{x} \right) \right] = m R \sin \text{ arc tang } \frac{y}{x}$$

$$= m R \frac{\frac{y}{x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}} = \frac{m R y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = my,$$

équation d'un plan incliné. La rainure est donc une ellipse.

CHAPITRE V.

EXCENTRIQUES A CADRE.

§ I.

EXCENTRIQUES A CADRE PERPENDICULAIRE.

58. Loi du mouvement. — Imaginons que l'on découpe un plateau suivant sa rainure; le noyau sera encore en état de conduire le bouton de la tige pendant que ses rayons vecteurs iront en croissant. Mais le bord externe de la rainure n'existera plus pour ramener le bouton, quand les rayons iront en décroissant. Pour remplir cette lacune, on disposera de l'autre côté du centre de rotation un second bouton relié au premier par l'intermédiaire d'un cadre dont les deux côtés passent en avant et en arrière du plateau, et dont le plan soit perpendiculaire au sien (*Pl. VI, fig. 99*). Dans les intervalles en question, on fera agir le noyau par rayons croissants sur le second bouton qui ramènera le reste du système.

Nous voyons par là que la catégorie des excentriques à cadre perpendiculaire dérive directement des excentriques à rainure; à tel point que nous n'avons rien à modifier aux formules qui ont été établies pour déduire le tracé de ces courbes de la loi de mouvement qu'il s'agit de réaliser. Nous avons cependant à indiquer quelques restrictions que la construction du cadre oblige à apporter dans les tracés.

59. Méthode géométrique. — Le plan du cadre passe par le centre de la came, et par suite la somme de deux rayons vecteurs directement opposés est constante et égale

au côté du cadre. Cette somme est appelée un *diamètre*, et par suite *les excentriques à cadre perpendiculaire doivent avoir un diamètre constant.*

D'après cela, si on se donne une moitié du profil, je veux dire la portion située d'un côté d'un certain diamètre fixe, l'autre pourra être considérée comme la conchoïde de celle-ci, et par suite on saura en construire les points et les tangentes (49).

EXEMPLE I. — *Repos.* — Le tracé à repos étant un arc de cercle concentrique de rayon R (53, I), la conchoïde sera un autre arc de cercle concentrique de rayon $\Delta - R$. C'est le principe de l'*excentrique à ondes* qui sert à produire une série d'intermittences (*Pl. VI, fig.* 100).

EXEMPLE II. — *Transmission uniforme.* — Le tracé de la transmission uniforme étant une spirale d'Archimède (53, II), la conchoïde sera une seconde branche de la même spirale située de l'autre côté du pôle, car les rayons vecteurs y décroissent précisément de quantités égales aux accroissements de ceux qui leur sont opposés, de sorte que la somme reste constante. On en déduit le tracé de la *came en cœur* (*Pl. VI, fig.* 99).

EXEMPLE III. — *Transmission sinusoïdale.* — Le tracé correspondant étant un cercle qui passe par le pôle (53, III), la ligne conjuguée sera la courbe appelée *limaçon de Pascal.*

60. On peut déduire du procédé de construction des tangentes la condition qui doit être remplie pour que les deux portions du tracé se raccordent. Désignons, en effet, par AB le diamètre fixe mené par le centre O. Nous savons que les normales à deux conchoïdes conjuguées (49) se rencontrent toujours sur la perpendiculaire élevée au pôle sur le rayon vecteur. Si donc on veut que la conchoïde et la proposée aient les mêmes normales en A et B, celles-ci

doivent pouvoir être considérées comme appartenant, l'une au tracé, et l'autre à sa conchoïde. D'après cela, pour qu'un profil se raccorde par les extrémités avec le profil complémentaire, il faut que ses normales extrêmes se rencontrent sur la perpendiculaire élevée par le centre sur le diamètre principal.

61. Si on s'impose, comme c'est le cas ordinaire, la condition que le mouvement soit composé de deux portions symétriques, la même symétrie doit exister dans le profil, et, par suite, on ne peut plus se donner que le quart du tracé, c'est-à-dire la portion comprise dans un angle droit. La symétrie fournira le tracé d'un quadrant adjacent, et l'on rentrera ainsi dans les conditions précédentes. Il est évident qu'alors la condition trouvée pour le raccordement sera satisfaite d'elle-même, puisque le tracé sera symétrique par rapport à la perpendiculaire élevée par le centre sur le diamètre principal. Mais il faudra en outre qu'il y ait continuité entre les deux premiers quadrants, et pour cela que l'extrémité du premier quart, non adjacente au diamètre principal, ait sa tangente parallèle à ce diamètre.

62. Quand on aura obtenu une solution quelconque, on pourra en déduire une infinité d'autres en comptant tous les rayons vecteurs, non plus à partir du centre, mais normalement à un cercle quelconque. On aura même la latitude de les porter, soit à l'extérieur, soit à l'intérieur. Par là, en effet, les diamètres nouveaux seront formés de la somme ou de la différence des anciens, et de ceux du cercle qui sont les uns et les autres constants. Cette opération revient évidemment à substituer à un tracé quelconque ses conchoïdes. Elle aura l'avantage d'adoucir les contours trop durs, mais en même temps elle présentera l'inconvénient d'augmenter avec les dimensions de l'appareil l'importance des glissements et du frottement.

63. Méthode analytique. — On peut procéder pour ces recherches au moyen du calcul, et assigner le profil conjugué d'un tracé proposé

$$r = f(\theta).$$

Si, en effet, Δ désigne le côté du cadre, on aura

$$r + r' = \Delta, \quad \theta + \theta' = \pi,$$

et par suite

$$r' = \Delta - f(\pi - \theta')$$

pour l'équation de la courbe cherchée.

Prenons comme exemple la transmission du mouvement uniforme, dont le profil est une spirale d'Archimède (53, II)

$$r = a + b\theta;$$

nous déterminerons ses constantes par les conditions

$$\theta = 0, \quad r = r_0; \qquad a = r_0,$$
$$\theta = \pi, \quad r = r_1; \quad a + b\pi = r_1, \quad b = \frac{r_1 - r_0}{\pi},$$
$$r = r_0 + \frac{r_1 - r_0}{\pi}\theta.$$

La courbe conjuguée sera, en faisant la transformation qui vient d'être indiquée,

$$r' = (r_0 + r_1) - \left[r_0 + \frac{r_1 - r_0}{\pi}(\pi - \theta')\right].$$

Si on effectue les réductions, on retrouve identiquement la même équation, et par suite, comme nous l'avons déjà reconnu, la spirale d'Archimède est à elle-même sa propre conchoïde (1).

64. Méthode graphique. — On peut encore substituer

(1) Le type le plus général des courbes qui sont à elles-mêmes leur

à cette méthode de calcul un procédé graphique. Pour le faire mieux comprendre, je l'expliquerai pour un excentrique particulier proposé par M. Morin; mais il sera facile d'en dégager le principe général.

Le mouvement uniforme qui est produit par la came en cœur (59, II) est le plus simple de tous; mais comme il est nécessairement alternatif, la transmission présentera des chocs aux deux points de raccordement. Il sera préférable, d'après cela, d'avoir une vitesse variable qui s'annule aux extrémités. Le mouvement le plus simple auquel on puisse recourir pour cela est le mouvement uniformément varié. On emploiera donc deux pareils mouvements se raccordant au milieu de la course par la même vitesse. L'espace étant proportionnel au carré du temps ou l'ordonnée au carré de l'abscisse, la courbe qui représente ce mouvement en coordonnées rectangulaires sera une parabole AB (*Pl. I, fig.* 18). On construira la parabole BC symétrique par rapport au point B, pour représenter la seconde période du trajet. Puis, après avoir divisé l'abscisse totale en un certain nombre de parties égales et l'espace angulaire autour d'un centre en autant de parties, on portera les ordonnées correspondantes suivant les rayons vecteurs, à partir du centre ou d'une circonférence de cercle. La loi de mouvement cherchée sera ainsi réalisée, et la condition des diamètres évidemment remplie; car la somme de deux rayons vecteurs opposés sera la somme de deux ordonnées également distantes des extrémités, et leurs longueurs sont visiblement complémentaires.

---

propre conchoïde est représenté par l'équation

$$r = \frac{\Delta}{2n\pi}\theta + f\left(\frac{p\theta}{2n\pi}\right),$$

f désignant une fonction arbitraire, mais périodique, qui ait p pour période; n reste en outre arbitraire.

65. Excentriques variables. — Toutes ces méthodes fournissent un tracé essentiellement fixe, et l'on a parfois intérêt à le faire varier. Un premier moyen, employé dans l'*excentrique de Saulnier,* consiste à disposer l'un contre l'autre deux excentriques réunis par un boulon (*Pl. VI, fig.* 101). Celui-ci les traverse de part en part à l'aide d'une rainure circulaire décrite autour du centre de rotation, de manière qu'on puisse décaler les pièces, les faire jouer l'une par rapport à l'autre et les caler dans une nouvelle situation relative. De cette manière, on fait varier les parties qui débordent l'une sur l'autre. Comme d'ailleurs le cadre sera conduit effectivement par un tracé discontinu, formé des arcs extérieurs de chacun des deux excentriques, il s'ensuit que le profil de transmission sera variable.

Un dispositif plus simple, réalisé dans l'*excentrique Meyer* (*Pl. VII, fig.* 102), consiste à disposer par la pensée l'un au-dessus de l'autre, comme une pile de pièces de monnaie, des excentriques à ondes (59, I) variant d'une manière continue. Il suffit de supposer que le cadre soit mis en regard de l'un ou de l'autre pour que la transmission varie. Pour plus de simplicité, on laisse le cadre fixe et on déplace l'excentrique dans le sens de sa propre tige, ce qui revient au même.

§ II.

EXCENTRIQUES A CADRE CIRCONSCRIT.

66. Loi du mouvement. — La troisième catégorie dérive de la seconde, en supposant simplement que le plan du cadre tourne d'un angle droit de manière à se confondre avec celui de l'excentrique. Le cadre devient alors un rectangle circonscrit à la courbe (*Pl. VII, fig.* 103). Mais ce simple changement altère profondément la théorie de l'appareil.

La conduite n'a plus lieu, en effet, en raison de la variation du rayon vecteur de l'excentrique, mais de celle de la distance du centre à ses diverses tangentes, c'est-à-dire du rayon vecteur de sa *podaire* (1).

La théorie que nous avons présentée (52), étant appliquée sans modification, fera connaître l'équation de la podaire

$$r = f(\theta),$$

et il restera à en déduire celle de l'antipodaire, c'est-à-dire de l'enveloppe des perpendiculaires élevées sur les rayons vecteurs par leurs extrémités. Or, cette perpendiculaire aura pour équation entre r' et θ'

$$r' \cos(\theta' - \theta) = r,$$

et par suite, la recherche de l'enveloppe reviendra à l'élimination de θ entre les deux formules (2)

$$r' \cos(\theta' - \theta) = f(\theta),$$
$$r' \sin(\theta' - \theta) = f'(\theta).$$

---

(1) On appelle ainsi le lieu des projections d'un point fixe sur les tangentes d'une courbe proposée qui prend alors le nom d'*antipodaire*.

(2) Si l'on prend, par exemple, pour podaire la spirale logarithmique dont la normale fait avec le rayon vecteur l'angle α, que l'on peut considérer comme compris entre zéro et le quadrant

$$r = e^{\theta \operatorname{tang} \alpha},$$

les équations deviennent

$$r' \cos(\theta' - \theta) = e^{\theta \operatorname{tang} \alpha},$$
$$r' \sin(\theta' - \theta) = e^{\theta \operatorname{tang} \alpha} . \operatorname{tang} \alpha ;$$

en ajoutant les carrés, on obtient

$$r' = \frac{e^{\theta \operatorname{tang} \alpha}}{\cos \alpha},$$

et en divisant, au contraire, membre à membre,

$$\operatorname{tang}(\theta' - \theta) = \operatorname{tang} \alpha.$$

67. Exemple I. — *Repos.* — La podaire à employer est alors un cercle concentrique (53, I), et il est évident que son antipodaire sera ce cercle lui-même. Car un cercle est à lui-même le lieu des projections de son centre sur les tangentes (66, note 2).

Exemple II. — *Transmission uniforme.* — La podaire est alors une spirale d'Archimède (53, II). Je dis que son antipodaire sera une développante de cercle.

Soit, en effet, AD (*Pl. I, fig.* 19) une normale à la développante de cercle, tangente par cela même à ce cercle ou perpendiculaire à l'extrémité de OD. OD sera parallèle à la tangente AP, et par suite la projetante OP le sera elle-même à AD. La figure OPAD est donc un rectangle et le rayon vecteur OP de la podaire de la développante se trouve égal à AD. Mais cette dernière ligne n'est autre que l'arc KD rectifié; elle croît donc avec lui proportionnellement à l'angle qui sépare sa direction de celle de la tangente au point K. Ainsi le rayon vecteur OP varie proportionnellement à son azimut. Il appartient donc enfin à une spirale d'Archimède.

Éliminant d'après cela θ, il vient

$$r' = \frac{e^{(\theta' - \alpha)\operatorname{tang}\alpha}}{\cos\alpha} = e^{\left[\theta' - \left(\alpha + \frac{\log\cos\alpha}{\operatorname{tang}\alpha}\right)\right]\operatorname{tang}\alpha},$$

Ainsi, l'antipodaire d'une spirale logarithmique est une spirale égale tournée dans son plan de l'angle

$$\alpha + \frac{\log\cos\alpha}{\operatorname{tang}\alpha}.$$

Il s'ensuit évidemment que la podaire d'une spirale logarithmique est de même une spirale égale tournée dans son plan et en sens inverse de ce même angle. La loi de conduite est donc la même pour cette rainure avec un cadre perpendiculaire ou avec un cadre circonscrit.

On peut, d'après cela, se proposer de trouver une spirale qui soit sa propre podaire ou antipodaire. Il suffira, pour cela, que la rotation ne la déplace

EXEMPLE III.—*Transmission sinusoïdale.* — La podaire est alors un cercle passant par le pôle (53, III), ou plus généralement un limaçon de Pascal qui en est la conchoïde. Nous avons vu, en effet (62), qu'une constante ajoutée sur tous les rayons agrandit le cadre, mais n'en modifie pas la marche.

Je dis que l'antipodaire du limaçon dérivé du cercle AB pour le point A (*Pl. I, fig.* 20) est un cercle décrit de B comme centre, avec la longueur constante pour rayon. Si, en effet, nous menons un rayon quelconque BM de ce cercle, la tangente MP et la projetante AP, celle-ci se composera du rayon vecteur AN du cercle primitif, plus la constante NP = BM. La projection P du point A sur les tangentes du cercle extérieur appartient donc au limaçon.

---

pas ou la ramène dans la même position. Nous poserons donc

$$\alpha + \frac{\log\cos\alpha}{\operatorname{tang}\alpha} = 2k\pi.$$

Cette équation admet d'abord la solution

$$\alpha = 2k\pi;$$

car on a

$$\left(\frac{\log\cos\alpha}{\operatorname{tang}\alpha}\right)_{\alpha=2k\pi} = \frac{0}{0} = \left(\frac{-\operatorname{tang}\alpha}{\frac{1}{\cos^2\alpha}}\right)_{\alpha=2k\pi}$$
$$= -(\sin\alpha\cos\alpha)_{\alpha=2k\pi} = 0.$$

Mais, comme α est compris dans le premier quadrant, cette solution n'a de sens que pour $k = 0$ et $\alpha = 0$. Elle indique alors que la spirale dégénère en un cercle. Et, en effet, le cercle jouit évidemment de la propriété énoncée. Nous en verrons plus loin une application (67, I).

Il ne peut, du reste, exister d'autres racines, car la dérivée du premier membre

$$-\frac{\log\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$$

est toujours réelle et positive dans le premier quadrant.

68. MÉTHODE GÉOMÉTRIQUE.—Le profil de l'excentrique, ainsi déterminé en vue de la loi de mouvement que l'on veut réaliser, reste soumis à certaines restrictions analogues à celles que nous avons trouvées pour les cadres perpendiculaires, et qu'il nous faut de même approfondir.

On voit, en effet, que les côtés du cadre dessinent deux tangentes parallèles du profil, et que les deux autres en marquent la distance. Ces derniers ayant une longueur invariable, il s'ensuit que les excentriques à cadre circonscrit sont nécessairement des courbes dont les tangentes parallèles conservent une distance constante.

Si donc on se donne une moitié du contour, l'autre partie sera l'antipodaire de la conchoïde de la podaire de la proposée. Ce point de vue fort compliqué se simplifiera dans un instant, mais il permet, dès à présent, de construire la courbe complémentaire comme enveloppe de droites. Nous pouvons même assigner sur chacune d'elles le point où elle touche l'enveloppe, et, par suite, tracer rigoureusement cette ligne par points et tangentes, suivant le mode employé ordinairement dans les arts graphiques.

En effet, si nous fixons par la pensée l'excentrique, le mouvement relatif du cadre sera celui d'un angle droit (*Pl. I, fig.* 21) dont un côté AB passe continuellement par le centre O, et dont l'autre AM s'appuie en M sur l'arc proposé. Par suite, en menant la normale MΩ et la perpendiculaire OΩ, nous reconnaîtrons, comme nous l'avons déjà fait (49), que Ω est le centre instantané (1).

Si donc nous voulons savoir en quel point la droite NB touche son enveloppe, il suffit (VIII) d'y projeter norma-

(1) Remarquons en passant ce théorème de Géométrie générale : Si l'on veut mener la normale en A à la podaire d'une courbe quelconque, il suffit de tirer AΩ, c'est-à-dire de joindre le point décrivant au milieu K de la droite OM, qui va du pôle au point de contact.

lement le centre instantané, c'est-à-dire de prolonger MΩ jusqu'à sa rencontre en N. On voit par là que la corde de contact de l'excentrique et du cadre reste parallèle aux côtés transversaux.

On peut, d'après cela, se représenter le profil conjugué d'une manière beaucoup plus simple. En effet, MN étant la normale commune aux deux courbes, et restant constante, on voit que ces lignes sont partout équidistantes et forment un couple de courbes parallèles ou de développantes d'une même développée (1).

69. Exemple I. — *Repos.* — Le profil étant un cercle concentrique (67, I) de rayon R, la courbe conjuguée sera un autre arc de cercle concentrique de rayon Δ — R, si Δ est le côté du cadre.

Exemple II. — *Transmission uniforme.* — Le profil étant une développante de cercle (67, II), la ligne conjuguée sera une courbe égale, car toutes les développantes d'un même cercle sont identiques.

Exemple III. — *Transmission sinusoïdale.* — Le profil étant un cercle excentrique de rayon R (67, III), la ligne conjuguée sera un autre arc de cercle concentrique à celui-ci et de rayon Δ — R. Cette solution ne diffère en rien de celle du premier exemple, le profil commun tourne seulement, dans le cas actuel, non plus autour de son centre, mais autour d'un point excentrique.

70. Quant à la condition de raccordement aux extrémités entre un arc et l'arc conjugué, elle se réduit à ce que la corde extrême soit normale en ces deux extrémités à l'arc proposé, et égale à la distance constante des tangentes.

(1) Par exemple, le profil conjugué d'une spirale logarithmique, d'une cycloïde ou d'une épicycloïde sera une développante de spirale égale, de cycloïde égale ou d'épicycloïde semblable.

Si l'on veut qu'il y ait symétrie dans la conduite, il suffit de se donner un quart du profil et d'en déduire le second par la symétrie, après quoi l'on rentrera dans le cas précédent. Le quart proposé devra, par suite, avoir ses tangentes extrêmes perpendiculaires l'une à l'autre, pour que la condition précédente soit satisfaite et qu'il y ait également continuité entre les deux portions symétriques.

71. *Méthode analytique.* — Pour procéder par la voie analytique dans la recherche du profil conjugué d'une courbe

$$y = f(x),$$

prenons l'équation de sa tangente

$$Y - f(x) = f'(x).(X - x),$$

et déduisons-en celle d'une droite menée parallèlement à la distance Δ,

$$Y - f(x) = f'(x).(X - x) - \Delta\sqrt{1 + f'^2(x)}.$$

Pour trouver l'enveloppe de cette droite, il nous faut éliminer x entre son équation et sa dérivée relative à x,

$$-f'(x) = f''(x).(X - x) - f'(x) - \Delta\frac{f'(x)f''(x)}{\sqrt{1 + f'^2(x)}}.$$

Nous remarquerons que $f''(x)$ est facteur commun et constitue une solution étrangère. Si, en effet, on l'annule, on obtient un certain nombre de solutions déterminées, et, en les reportant dans l'équation précédente, elles fournissent seulement le système des droites menées à la distance voulue, parallèlement aux tangentes des points d'inflexion du profil proposé. Supprimant donc ce facteur, il reste

$$X - x = \Delta\frac{f'(x)}{\sqrt{1 + f'^2(x)}}.$$

On en tire

$$f'(x) = \frac{X - x}{\sqrt{\Delta^2 - (X - x)^2}},$$

et l'équation de l'enveloppée devient alors

$$f(x) = Y + \sqrt{\Delta^2 - (X - x)^2}.$$

C'est entre ces deux relations très-simples qu'il restera dans chaque cas à éliminer x pour avoir l'équation du profil complémentaire.

Si l'on applique, par exemple, cette méthode à l'équation du cercle, on trouvera, comme nous l'avons vu (69, I), celle d'un cercle concentrique de rayon $\Delta - R$. Cette solution a été appliquée dans les machines sous deux formes différentes que je vais indiquer.

72. *Excentrique circulaire à cadre.* — Si l'on prend $\Delta = 2R$, l'arc conjugué est le prolongement du demi-cercle proposé, et l'on obtient un noyau complétement circulaire installé autour d'un point quelconque autre que son centre. Nous avons vu d'ailleurs (67, III) que le cadre est alors animé d'un mouvement sinusoïdal dont la course est double de l'excentricité.

Excentrique triangulaire. — Si l'on prend $\Delta = R$, le cercle conjugué se réduit au centre, disposition que l'on réalise de la manière suivante (*Pl. VII, fig.* 103). On décrit sur chaque côté d'un triangle équilatéral et du sommet opposé un arc qui est dès lors de 60 degrés; la figure formée par ces trois arcs est appelée *excentrique triangulaire*, et l'on doit la faire tourner autour de l'un de ses sommets.

Le mouvement est périodique à chaque tour, chacune des périodes comprend un aller et un retour symétriques, et chacune de ces courses simples trois phases dont deux

de mouvement sinusoïdal symétriques l'une de l'autre, et la troisième de repos ou d'intermittence. Nous avons reconnu en effet que l'arc de cercle concentrique est le profil de repos (67, I), et que l'arc de cercle tournant autour d'un de ses points est le profil de transmission sinusoïdale (67, III).

Si d'ailleurs, pour mettre le détail du mouvement en évidence, nous considérons l'excentrique dans les trois positions OAB, OBC, OCD (*Pl. II, fig.* 22), les deux premières phases comprendront le passage de OAB en OBC et de OBC en OCD, et seront évidemment symétriques par rapport à la position moyenne. Si l'on effectue encore, à partir de OCD, une rotation de 60 degrés, l'arc CD glissera sur lui-même sans déplacer le côté DT du cadre, et, par suite, celui-ci restera immobile pendant cet intervalle.

CHAPITRE VI.

ENGRENAGES PLANS.

§ I.

GÉNÉRALITÉS.

73. Nous comprenons sous la dénomination d'*engrenages* les organes de contact immédiat et de glissement mixte; ceux du moins dans lesquels le frottement joue un rôle assez important pour qu'il soit nécessaire de restreindre à une faible étendue, aux environs des centres instantanés, le contour de transmission, en répétant un grand nombre de fois cet organe élémentaire, de manière à constituer ce qu'on appelle une *roue dentée* (XXV).

La théorie géométrique des engrenages a pour but d'armer deux axes de rotation de deux surfaces ou dents capables de se conduire l'une l'autre en restant continuellement en contact, c'est-à-dire d'*engrener*. Dans l'industrie, on impose en outre la condition que la transmission soit uniforme, c'est-à-dire le rapport des vitesses angulaires constant. Mais nous nous élèverons à une plus grande généralité, sans rien sacrifier de la simplicité et de l'élégance de la théorie, en faisant d'abord abstraction de cette restriction. On reconnaîtra bientôt l'utilité de cette extension.

Le mode de conduite le plus simple est évidemment le roulement, et par suite il semble qu'il doive suffire de la théorie des galets (chap. I et II). Cependant on remarquera que dans les solutions trouvées alors il existe, pour celui

des deux corps qui doit conduire l'autre, des périodes pendant lesquelles les rayons vecteurs sont croissants, ce qui produit en effet la conduite, mais aussi d'autres intervalles pendant lesquels les rayons iront en décroissant, et la transmission s'arrêtera, puisqu'il n'y a pas attraction de la substance de l'une des courbes pour celle de l'autre. Cette difficulté, dont je n'ai pas parlé alors, se lèvera en adaptant aux galets, dans ces intervalles, une denture dont l'engrènement entraîne le second corps. Le tracé de ces engrenages, pour lequel on ne donne d'ordinaire aucune règle, sera fourni justement par la théorie généralisée comme je viens de le dire.

Je commencerai par réduire les difficultés de la question en l'envisageant d'abord dans un plan, et cherchant simplement à armer deux centres de rotation de courbes planes qui engrènent.

74. Si nous réduisons par la pensée l'une des deux dents au repos (XXI), le mouvement relatif de l'autre sera un mouvement plan, et à ce titre (IX) on peut le considérer comme le roulement de deux courbes qui sont le lieu des centres instantanés dans l'espace absolu et dans la figure mobile. Le problème se transforme donc de la manière suivante : Deux lignes, qu'on appelle *primitives*, C, C′, roulant l'une sur l'autre, les armer de deux autres courbes ou dents D, D′ qui restent continuellement en contact. Dès lors il se subdivise en deux questions distinctes. En premier lieu, trouver des couples de courbes roulantes : c'est un problème déjà résolu (chap. I et II), et aux solutions duquel nous n'avons qu'à nous reporter. En second lieu, deux courbes primitives étant données, leur adapter des couples de dents. Ce second problème est encore indéterminé, et, pour un système roulant assigné arbitrairement, il existe une infinité de systèmes glissants. On peut, pour

les trouver, employer deux méthodes également générales que je vais faire connaître. La première est due à M. le général Poncelet.

75. Méthode des enveloppes. — Désignons par C′ la courbe fixe et par C la courbe mobile qui prend les positions consécutives C_1 C_2 C_3.... Choisissons arbitrairement une dent D pour l'adapter à C, et désignons de même par D_1 D_2 D_3.... ses positions successives. Concevons l'enveloppe D′ de cette série de courbes : ce sera évidemment la dent conjuguée qu'il faut adapter à la roue C′, car c'est une ligne tangente à D dans toutes ses positions.

Ce principe semble exiger le tracé d'une courbe enveloppe, opération graphique peu satisfaisante. On peut, pour plus de précision, assigner le point de contact situé sur chaque enveloppée. Nous savons, en effet (VIII), qu'il suffit pour cela d'y projeter le centre instantané, c'est-à-dire le point de contact actuel des courbes roulantes, qui en sont toutes les deux le lieu. De là un principe général et fondamental dans la théorie des engrenages plans : *La normale commune des dents passe nécessairement par le point de contact des courbes primitives.*

On peut encore apporter plus de précision et de simplicité dans le tracé graphique en évitant la reproduction de la courbe D dans toutes ses positions D_1 D_2 D_3... et construisant tous les points de D′ à l'aide d'un seul tracé D. Si nous prenons en effet (*Pl. II*, *fig.* 23) en ΩΩ′ un arc égal à $\Omega\Omega'_1$, nous aurons en Ω′ le point que le roulement amène en Ω'_1, et par suite, en abaissant Ω′M normalement sur la courbe D, nous obtiendrons Ω′M dans la première position, car cette droite n'a pas cessé de faire un angle droit avec la courbe proposée D. Il suffira donc de mesurer la longueur de cette normale et l'angle qu'elle fait avec la ligne C en Ω′ pour la reporter sous cette inclinaison et

avec cette longueur en $\Omega'_1 M_1$. On aura ainsi le point M_1, et sa tangente s'obtiendra en élevant une perpendiculaire à $\Omega'_1 M_1$.

On abrégera encore en opérant de la manière suivante. On prendra sur C une série de points que l'on reportera sur C′ en y prenant des arcs égaux. De chacun d'eux on essayera une ouverture de compas, en la rétrécissant jusqu'à ce que le cercle décrit cesse de couper la courbe pour la toucher. La droite qui joindrait le centre au point de contact sera la normale de cette ligne, comme étant celle du cercle tangent. On reportera alors la pointe du compas, sans changer son ouverture, au point correspondant de C′ et on décrira un arc de cercle. Il contiendra le point M_1, comme ayant pour rayon $\Omega'_1 M_1$, et sera tangent à D′, puisque la normale de cette courbe est un de ses propres rayons. Cette courbe, étant tangente à tous les arcs de cercle ainsi décrits, pourra être tracée comme leur enveloppe. On évitera ainsi l'emploi peu satisfaisant du rapporteur pour la reproduction d'angles nombreux.

76. Méthode des roulettes. — Prenons, outre les courbes primitives C, C′, une troisième ligne arbitraire A et faisons-la rouler sur C′ pendant que C′ roule sur C, de manière que les trois courbes restent continuellement tangentes. Au même point il y aura, par cela même, roulement de A sur C, puisque ce mode de mouvement revient à l'application d'arcs égaux les uns sur les autres. Un point quelconque M, pris sur la circonférence de A ou plus généralement dans son plan, décrira une trajectoire D′ dans l'espace absolu; il en parcourra une autre D dans le roulement relatif à la courbe C, trajectoire que l'on se figurera plus facilement en fixant par la pensée la ligne C pour y faire rouler A. Je dis que D et D′ fournissent une paire de dents.

En effet ces courbes se rencontrent, puisque c'est le même point qui les décrit toutes deux, et elles sont tangentes comme ayant même normale : car la normale à la trajectoire d'un point d'une courbe roulante s'obtient (VIII) en joignant le point décrivant au point de contact des courbes proposées, qui est le centre instantané (XXII), et ce point de contact est le même pour les deux modes de génération. Nous vérifions ainsi de nouveau que la normale commune des dents passe par le point de contact des lignes primitives.

77. Cette méthode est plus simple que la précédente, mais moins directe, en ce que le choix arbitraire porte sur une courbe auxiliaire A et non sur l'une des dents que l'on veut employer. On peut montrer, du reste, d'après une remarque de M. Airy, qu'elle a exactement la même portée que la première, c'est-à-dire qu'on peut toujours trouver une courbe A telle, qu'en la faisant rouler sur une ligne donnée C, un de ses points engendre une autre ligne donnée D.

Prenons, en effet, le point M mobile de la courbe inconnue A comme centre d'un système de coordonnées polaires, la droite qui va de ce pôle M au point quelconque Ω de A est la normale de D comptée jusqu'à C. D'après cela, puisque C et D sont données, on peut considérer comme déterminé pour chacune de ces normales r l'angle qu'elle fait avec la courbe C, ou, si l'on veut, la tangente trigonométrique de cet angle sous la forme $f(r)$. Mais la ligne A, étant tangente à C, fait le même angle qu'elle avec le rayon vecteur, et à ce titre cette tangente a pour valeur $\frac{rd\theta}{dr}$. On aura par suite, pour la courbe inconnue A :

$$\frac{rd\theta}{dr} = f(r);$$

d'où son équation finie

$$\theta = \int \frac{f(r)}{r}\, dr.$$

On trouvera donc toujours une courbe A remplissant la condition voulue, sous la seule réserve que les normales de D rencontrent C.

78. Exemple I. — Cherchons une courbe qui, en roulant sur une droite, engendre une autre droite.

L'angle que la normale de D fait avec C sera alors constant, et nous poserons

$$f(r) = \frac{1}{m};$$

il vient, en intégrant,

$$m\theta = \log r - \log C,$$
$$r = Ce^{m\theta},$$

équation d'une spirale logarithmique.

Exemple II. — Cherchons de même une courbe qui, en roulant sur un cercle, engendre la développante d'un cercle concentrique intérieur.

La normale de cette développante fait encore un angle constant avec le cercle extérieur. Le calcul que nous venons de faire s'appliquera donc de même, et on retrouvera une spirale logarithmique. Le problème précédent n'est qu'un cas limite, vers lequel on tend en augmentant indéfiniment les rayons des cercles.

§ II.

EXEMPLES.

79. Je choisirai, pour montrer des exemples définitifs de la théorie précédente, les appareils employés dans l'in

dustrie. On s'y assujettit toujours à conserver un rapport constant de vitesse. Nous avons vu qu'alors (4) le système correspondant de galets est formé de deux cercles qu'on appelle *cercles primitifs*, et qui peuvent être extérieurs ou intérieurs.

Engrenage à lanterne (1). — La dent mobile D est un cercle ou *fuseau* dont le centre se trouve sur la circonférence primitive C (*Pl. VII, fig.* 104). Ce point décrit ainsi une épicycloïde. Or, quelle que soit la route que parcourt le centre d'un cercle, on sait que son enveloppe est une courbe parallèle, c'est-à-dire une autre développante de la même développée (2). Comme d'ailleurs la développée d'une épicycloïde est elle-même une épicycloïde, il s'ensuit que la dent conjuguée D′ ou l'*alluchon* est une développante d'épicycloïde. Mais comme cette courbe présente un rebroussement sur la ligne des centres, on ne peut employer que l'une de ses branches, et de cette manière la conduite n'a lieu que d'un côté de la ligne des centres.

80. *Engrenage à développantes.* — La dent mobile est une développante D d'un cercle C_1 intérieur et concentrique à C. Nous avons trouvé (78) que la roulette auxiliaire A est une spirale logarithmique qui décrit par son pôle cette développante quand on la fait rouler sur C. D'après cela, la dent conjuguée D′, qui s'obtient (76) en faisant rouler cette même spirale sur C′, sera pour la même raison la développante d'un cercle C'_1 intérieur et concentrique à C_1. Il n'y aura d'ailleurs aucun point singulier

(1) Je me borne ici à ce qui est nécessaire pour faire comprendre les exemples. J'ai donné, dans mon *Traité théorique et pratique des Engrenages*, des détails très-circonstanciés qui dépasseraient ici les limites du cadre dont je dois conserver les proportions.

(2) Haton de la Goupillière, *Calcul infinitésimal*, p. 194.

sur la ligne des centres, et la conduite aura lieu de part et d'autre.

On remarquera que toutes les roues à développantes peuvent engrener ensemble, car le rayon de l'une ne détermine en aucune façon celui de l'autre, comme cela avait lieu par exemple dans l'engrenage à lanterne. C'est un avantage qui mérite d'être remarqué, car si une des roues vient à se briser, l'autre reste en état de servir. En outre, s'il est nécessaire que les roues puissent s'écarter ou se rapprocher, comme dans les laminoirs, la conduite n'en a pas moins lieu. Il suffit simplement de changer, par la pensée, de cercles primitifs. Enfin une roue peut en conduire à la fois plusieurs autres dissemblables, si cela devient nécessaire, dans un cas donné.

On remarquera encore qu'une usure constante ne modifie pas le profil des dents. Elle le remplace en effet par une courbe parallèle ou une seconde développante de cercle; et toutes les développantes d'un même cercle sont identiques.

81. *Engrenage à épicycloïdes.* — La roulette auxiliaire A est un cercle quelconque, et le point décrivant M est pris sur sa circonférence. Il s'ensuit que les dents D, D′ sont les épicycloïdes engendrées par le roulement de A sur C et C′.

Engrenage à flancs. — On simplifie le système en supposant que le diamètre de A soit le rayon du cercle C, auquel il est intérieur. Dans ces conditions, l'épicycloïde D, engendrée par le roulement de A à l'intérieur de C, dégénère en un diamètre de ce cercle que l'on appelle le *flanc*. En effet (*Pl. II, fig.* 24), les arcs $\Omega_1\Omega$ et $\Omega_1 M$, sont alors égaux comme mesurant un même angle $\Omega_1 O\Omega$, qui est angle au centre du cercle de rayon double et angle inscrit dans le cercle de rayon moitié. Donc M est la position de Ω,

après un roulement effectué sur l'arc $\Omega\Omega$, et par suite ce point ne quitte pas le diamètre $O\Omega$ (1).

Engrenage à flancs réciproque. — Lorsque le contact arrive sur la ligne des centres, il atteint le rebroussement de l'épicycloïde et géométriquement il doit passer sur la branche suivante ; mais comme celle-ci ne saurait exister matériellement en même temps que la première, le contact cesse, de sorte que la conduite n'a lieu que d'un côté de la ligne des centres. Pour obvier à cet inconvénient, on double l'appareil (*Pl. II, fig.* 25) en imaginant un cercle A′, moitié de C′, qui remplisse les mêmes fonctions que A par rapport à C. Par là chaque dent se trouve formée d'un flanc et d'une épicycloïde.

On s'assurera facilement (*Pl. II, fig.* 26) que cette combinaison ne saurait être réalisée avec des cercles primitifs intérieurs, car l'une des épicycloïdes, au lieu d'être en prolongement du flanc correspondant, formerait avec lui un rebroussement impossible à réaliser.

82. *Crémaillère.* — Si nous imaginons qu'un des rayons primitifs croisse jusqu'à l'infini, la vitesse angulaire, qui est en raison inverse (3), devient nulle, et le mouvement se change en translation (*Pl. VII, fig.* 107). La crémaillère sert donc à transformer une rotation en une translation. Il en existe une infinité dont on obtiendra les profils en passant à la limite dans les solutions précédentes.

---

(1) On voit par là que les sommets d'un polygone régulier inscrit au petit cercle décrivent, lorsque les deux roues tournent sur leurs centres, les rayons d'une étoile régulière dans le grand cercle. On a utilisé cette propriété, en figurant ces sommets par des boulons que des bras relient au centre du petit cercle, et ces rayons par des rainures rectilignes pratiquées dans le disque du grand cercle. La rotation du premier détermine alors celle du second. Dans le modèle adopté, la petite roue a trois bras et la grande trois diamètres ou six rayons.

Nous rencontrons d'abord deux sortes de crémaillères à lanterne. Si on adapte les fuseaux à la roue, l'alluchon de la crémaillère est une développante de cycloïde; si on adapte, au contraire, le fuseau à la crémaillère, l'alluchon de la roue est une développante du cercle primitif.

Dans l'engrenage à développantes, la courbe devient rectiligne lorsque la courbure du cercle concentrique au cercle primitif diminue jusqu'à zéro, et l'on a une crémaillère à plans inclinés.

Il existe encore deux crémaillères à flancs. On peut, en effet, faire porter le flanc par la crémaillère, et la courbe de la roue devient la développante du cercle primitif; ou adapter le flanc à la roue, et la courbe de la crémaillère se change en cycloïde. La réunion des deux systèmes fournit la crémaillère à flancs réciproques (*Pl. II, fig.* 27).

83. Épures d'engrenages. — Pour produire la conduite d'un arbre par l'autre, une seule dent suffirait au point de vue géométrique; et même, dans la réalité, on peut citer la *cisaille* ou la *presse à excentrique* (*Pl. III, fig.* 36) comme exemple d'un engrenage d'une seule dent qui est un cercle excentrique conduisant un autre engrenage d'une seule dent, à savoir une droite. A la vérité, le rapport des vitesses n'est pas constant (244); mais nous avons écarté ci-dessus cette restriction (73).

84. Cependant le caractère distinctif d'un engrenage, lorsqu'on se préoccupe du frottement, est, comme je l'ai expliqué (XXV), la reproduction répétée d'une dent de faible dimension. Pour constituer dans ces conditions une roue dentée à l'aide de l'une quelconque des solutions précédentes, on divise le cercle primitif en un nombre entier de parties égales qui formeront autant de dents. Ce nombre est appelé le *module,* et l'intervalle le *pas*. On prélève, dans la pratique, $\frac{1}{13}$ à $\frac{1}{16}$ du pas pour former le *jeu,* et on

répartit le reste entre le *plein* et le *vide* en raison inverse des résistances spécifiques des matières de la roue et de sa conjuguée. Cette division se fera donc en parties égales si cette substance est la même pour les deux. Les points ainsi marqués servent d'origine aux deux séries de lignes destinées à former les faces de chaque dent. On termine les dents à l'extérieur par un cercle dit *d'échanfrinement*, et on les relie l'une à l'autre à l'intérieur par un autre cercle dit *d'évidement*.

Pour déterminer leurs rayons, on s'impose habituellement la condition d'avoir continuellement trois couples en prise. D'après cela, on porte sur les cercles primitifs C, C', à partir de leur point de contact Ω (*Pl. II, fig.* 28), deux arcs ΩN, $\Omega N'$ représentant trois pas ou un pas et demi, suivant que, dans la solution employée, la conduite s'effectue d'un seul côté ou de part et d'autre de la ligne des centres. On construit en NM, N'M' les positions correspondantes des dents, et, pour connaître le point de contact actuel, on y abaisse de Ω des normales en ΩM, $\Omega M'$ (75). Les dents doivent dès lors cesser à partir de ces points, et par suite OM', O'M sont les rayons des cercles d'échanfrinement A, A'. Quant à ceux des cercles d'évidement B, B', ce sont, au jeu près, les différences de ceux-ci à la ligne des centres. Il est, en effet, inutile de refouiller chacune des roues plus qu'il n'est nécessaire pour le passage des saillies de l'autre, et par suite chaque cercle d'évidement doit être tangent au cercle d'échanfrinement conjugué. On termine en arrondissant par de petits arcs de cercle les angles vifs, saillants ou rentrants, que présente encore le tracé.

§ III.

COURBURE DES ENGRENAGES.

85. Formule de Savary. — Supposons qu'une ligne quelconque a roule sur une autre a' (*Pl. II, fig.* 29). Une courbe α est liée à a et enveloppe dans son mouvement une quatrième ligne α'. Il existe nécessairement une relation entre les courbures aux points de contact simultanés, de telle façon que, trois d'entre elles étant données, la dernière puisse s'en déduire.

Pour trouver cette relation, menons la normale commune oo' des courbes a et a'. Si nous prenons deux arcs infiniment petits égaux $mm_1 = mm'_1 = ds$, leurs extrémités m_1 et m'_1 viendront plus tard en contact. Les normales m_1o et m'_1o' de ces points se trouveront alors en prolongement, et par conséquent la rotation éprouvée par la figure mobile sera la somme des angles mom_1 et $mo'm'_1$. Il est clair, du reste, que ces normales déterminent par leur intersection avec les premières les centres de courbure o et o' des lignes a et a'.

Menons de même la normale commune $\omega\omega'$ des courbes α et α'. Nous savons (75) qu'elle passe nécessairement par le point de contact des courbes roulantes, c'est-à-dire par m. Les normales qui viendront au second instant coïncider sont, d'après cela, celles qui aboutissent en m_1 et m'_1, puisque ce sont ces points qui forment alors le contact de a et a'. Il suffit donc de mener $m_1\mu_1$ et $m'_1\mu'_1$ normalement à α et α'. Ces droites déterminent les centres de courbure ω et ω' et elles viendront se mettre en prolongement l'une de l'autre après une rotation égale à la somme des angles $\mu\omega\mu_1$ et $\mu'\omega\mu'_1$.

Le déplacement angulaire se trouvant ainsi exprimé de

deux manières différentes, on peut poser

$$mom_1 + mo'm'_1 = \mu\omega\mu_1 + \mu\omega'\mu'_1.$$

Désignons par r et r', ρ et ρ' les rayons de courbure des lignes a et a', α et α'. Appelons aussi d la distance $m\mu$ des deux points de contact, et θ l'angle des deux normales communes. On a d'abord

$$mom_1 = \frac{mm_1}{mo} = \frac{ds}{r},$$
$$mo'm'_1 = \frac{mm'_1}{mo'} = \frac{ds}{r'},$$

et ensuite, en abaissant mh et mh' perpendiculairement sur $\omega\mu_1$ et $\omega'\mu'_1$,

$$\mu\omega\mu_1 = \frac{mh}{m\omega} = \frac{ds\cos\theta}{\rho + d},$$
$$\mu\omega'\mu'_1 = \frac{mh'}{m\omega'} = \frac{ds\cos\theta}{\rho' - d},$$

il vient donc, en supprimant le facteur ds,

$$(1) \qquad \left(\frac{1}{\rho + d} + \frac{1}{\rho' - d}\right)\cos\theta = \frac{1}{r} + \frac{1}{r'}.$$

Telle est la relation cherchée.

Pour la généraliser complétement, il suffit de supposer que les rayons r, r' et ρ, ρ' puissent devenir négatifs quand le sens de la courbure est l'inverse de celui que nous avons supposé. Il est clair, en effet, que les rotations partielles correspondantes sont alors de sens contraires et qu'elles se retranchent au lieu de s'ajouter. En même temps, la position de d change par rapport à ρ et ρ', et les termes

$$\frac{1}{\rho + d}, \quad \frac{1}{\rho' - d}$$

deviennent, soit ensemble, soit séparément,

$$-\frac{1}{\rho - d}, \quad -\frac{1}{\rho' + d},$$

ce qui peut s'exprimer ainsi par le seul changement de signe des rayons ρ et ρ' :

$$\frac{1}{-\rho+d}, \quad \frac{1}{-\rho'-d}.$$

Ce problème comprend en particulier celui des roulettes. Si, en effet, au lieu de considérer α' comme l'enveloppe d'une ligne donnée α, on l'envisage comme la trajectoire d'un point α lié à la courbe a, il suffira de considérer α comme un cercle de rayon infiniment petit, ou de faire dans la formule générale $\rho = 0$.

86. La formule (1) peut s'interpréter d'une manière fort simple (*Pl. II, fig.* 30). Elle exprime, en effet, que *les droites* $o\omega$, $o'\omega'$ *qui joignent deux à deux les centres de courbure des lignes* a, α *et* a', α' *se rencontrent sur la perpendiculaire* mp *élevée au point de contact* m *des courbes roulantes sur la normale commune* $\omega\omega'$ *des courbes enveloppes.*

Pour le faire voir, abaissons de o et o' les perpendiculaires oq, $o'q'$ sur $\omega\omega'$. Puis calculons mp en considérant d'abord p comme situé sur la droite $o\omega$. Les triangles semblables ωoq, ωpm donnent pour cela la proportion

$$\frac{pm}{\omega m} = \frac{oq}{\omega q}.$$

Mais on a d'ailleurs, dans le triangle rectangle moq,

$$\omega m = \omega\mu + m\mu = \rho + d,$$
$$oq = om.\sin omq = r\sin\theta,$$
$$\omega q = \omega m - qm = (\rho + d) - r\cos\theta,$$

et par suite

$$pm = \frac{(\rho+d)r\sin\theta}{(\rho+d) - r\cos\theta}.$$

Si l'on calcule de même pm en considérant maintenant p

comme situé sur la droite $o'\omega'$, on déduira de la similitude des triangles $\omega' o' q'$ et $\omega' pm$

$$pm = \frac{(\rho' - d) r' \sin\theta}{r\cos\theta - (\rho' - d)}.$$

Or, la formule (1) peut s'écrire ainsi

$$\frac{\cos\theta}{\rho + d} - \frac{1}{r} = \frac{1}{r'} - \frac{\cos\theta}{\rho' - d},$$

ou encore

$$\frac{r\cos\theta - (\rho + d)}{(\rho + d) r} = \frac{(\rho' - d) - r'\cos\theta}{(\rho' - d) r'}.$$

Ces expressions renversées sont, au signe près et sauf le facteur $\sin\theta$, celles que nous venons de trouver successivement pour les longueurs interceptées sur la perpendiculaire pm par chacune des droites $o\omega$ et $o'\omega'$. On voit donc que ces trois droites se rencontrent au même point.

87. On déduit de là une construction fort élégante de l'un quelconque des centres de courbure, quand on connaît les trois autres. *On choisira en effet parmi ces derniers les deux qui se correspondent. On les joindra par une droite que l'on prolongera jusqu'à la rencontre de la perpendiculaire mp, puis, joignant le point p au troisième centre, on obtiendra le dernier à l'intersection avec celle des deux normales communes sur laquelle il doit se trouver.*

On remarquera que le point μ de contact des enveloppes ne joue aucun rôle dans cette construction. Si donc on substitue successivement à α les diverses développantes de sa développée, le point μ changera, mais ω restera le même, par suite aussi ω'. On obtiendra donc pour enveloppe les diverses développantes de la développée de α'. En d'autres termes, *il suffit qu'une courbe α en enveloppe une autre α' pour que toute la série des courbes*

équidistantes à α enveloppe la série des courbes équidistantes à α'.

88. Tracé approximatif de Willis. — Dans la pratique les dents sont toujours nombreuses et courtes (XXV). Leur courbure varie donc dans d'étroites limites, et on peut, quand on se contente d'une approximation, les considérer comme un arc de cercle. On a été pendant longtemps dans l'usage de prendre pour centre de chaque dent la base de la suivante. Cette méthode est grossière et sans aucune raison d'être. Il faut au moins, pour que l'arc de cercle puisse remplacer le profil exact, qu'il ait le même centre de courbure en un point moyen.

C'est en partant de ce principe que M. Willis est arrivé à simplifier le tracé des engrenages par une méthode qu'il a introduite dans les ateliers anglais (*Pl. II, fig.* 3-1). Il remplace pour chaque roue le flanc et la courbe par deux arcs de cercle dont les centres se déterminent de la manière suivante.

On mène encore par le point m une droite $m\omega$ sous l'angle de 75 degrés, et on lui élève la perpendiculaire pp_1 que l'on prend égale des deux côtés et moindre que le plus petit des rayons primitifs. En se servant d'abord du point p, si on le joint à o et o', on trouvera en ω et ω' deux points que l'on peut considérer comme des centres de courbure correspondants (87). La valeur absolue des rayons de courbure restant arbitraire, on prend un point μ sur le cercle C' à un demi-pas de la ligne des centres, et les rayons de courbure sont $\omega\mu$ pour le flanc D de la roue C et $\omega'\mu$ pour la courbe D' de la roue C'. En se servant de même du point p_1 on trouve à l'aide de op_1 et $o'p_1$ les points ω_1 et ω'_1; puis prenant μ_1 à un demi-pas de m sur le cercle C, on adopte les rayons $\omega_1\mu_1$ pour la courbe D_1 de la roue C et $\omega'_1\mu_1$ pour le flanc D'_1 de la roue C'.

Pour simplifier le tracé, on mène comme tout à l'heure de o comme centre avec $o\omega$ et $o\omega_1$, puis de o' avec $o'\omega'$ et $o'\omega'_1$ comme rayons, quatre cercles qui seront les lieux des quatre centres de courbure respectifs. On s'est borné sur la *fig.* 31 à décrire des centres Ω, Ω_1 et Ω', Ω'_1 les profils DD_1 et $D'D'_1$.

89. Pour faciliter l'emploi de sa méthode, M. Willis a imaginé une sorte de règle graduée qu'il appelle *odontographe* (*Pl. VII, fig.* 105). Cet appareil, qui est rapporté au pied anglais, aurait besoin de subir une transformation pour être introduit dans les ateliers du continent. Voici du reste en quoi il consiste.

L'instrument porte sur son plus grand bord une double graduation qui part du zéro et s'étend à la fois vers a et vers b. Un côté oblique s'éloigne du zéro sous l'angle de 75 degrés. Enfin la règle renferme deux tables, A et B, qui font connaître suivant le pas et le module les distances du point de contact des cercles primitifs aux deux centres de courbure du flanc et de la courbe. Indiquons maintenant la manœuvre de l'appareil.

On marque sur le cercle primitif C' un pas mm que l'on divise en deux parties égales au point μ (*Pl. II, fig.* 32). On mène les rayons $o'm$ de ses extrémités. Puis on applique sur chacun d'eux le bord oblique de l'odontographe en faisant affleurer la règle graduée à l'extrémité correspondante m. Le zéro tombe par cela même au point m. On trouve dans la table A la distance $m\omega'_1$ du centre de courbure du flanc et on la prend sur la graduation a, de manière à obtenir le point ω'_1 d'où l'on décrit le cercle D'_1. On lit d'autre part dans la table B la distance $m\omega'$ du centre de la courbe et on la compte sur la graduation b. On trouve ainsi le point ω' d'où l'on décrit le cercle D'.

Il est clair, en effet, que la position de gauche reproduit identiquement les conditions de la *fig.* 31. Il en est de même pour l'autre, mais par rapport au point μ' qui serait pris symétriquement de l'autre côté de m. Il est nécessaire de dédoubler ainsi l'opération, attendu que sur la *fig.* 31 les cercles des dents doivent être décrits l'un de ω' par le point μ, et l'autre de ω'_1 par μ_1 qu'on peut confondre avec μ'; tandis qu'ici les deux arcs doivent partir du même point μ (*fig.* 32), ce qui oblige, quand on veut décrire le second, à faire tourner toute la *fig.* 31 d'un pas vers la droite.

CHAPITRE VII.

SURFACES DES ENGRENAGES.

§ I.

AXES PARALLÈLES.

90. Engrenages cylindriques. — Revenons maintenant aux trois dimensions de l'espace que la matière affecte nécessairement, et proposons-nous la recherche des surfaces qui doivent limiter les dents.

Nous procéderons pour cela comme dans le problème des engrenages plans en ramenant le mouvement relatif des deux corps à un mouvement absolu. Il faut en premier lieu supposer l'un des deux au repos et composer à chaque instant sa rotation changée de sens avec celle qui appartient en propre à l'autre corps (XXI). Le mouvement continu peut ensuite être assimilé au roulement simple ou mixte de deux surfaces réglées l'une sur l'autre. Mais il est nécessaire à cet égard de distinguer trois cas, suivant que les axes sont parallèles, concourants, ou non-concourants.

Lorsque les axes sont parallèles, le mouvement résultant est lui-même une rotation autour d'un axe situé dans la même direction. Il s'effectue à chaque instant parallèlement à un plan perpendiculaire et peut dès lors être assimilé au roulement simple des deux cylindres qui seraient décrits par l'axe instantané dans l'espace absolu et dans la figure mobile. On les appelle *cylindres primitifs*.

Dans le cas particulier où le rapport des vitesses angu-

laires doit rester constant, on reconnaîtra, comme au § 4, que ces cylindres sont de révolution.

91. La solution la plus naturelle consiste dès lors à adopter pour surfaces des dents d'autres cylindres dont les génératrices soient parallèles à celles des précédents. Si l'on coupe alors tout le système par un plan perpendiculaire, on rentre dans le problème des engrenages plans, et chacune de ses solutions pourra être reproduite sous la forme actuelle (*Pl. VII, fig.* 106 et 107).

Dans ces *engrenages cylindriques,* le contact a lieu à chaque instant tout le long d'une même génératrice.

92. Solution générale. — Cette combinaison, quoique de beaucoup la plus usitée, n'est pourtant pas la seule admissible.

Adaptons, en effet, au cylindre primitif C une surface quelconque D, effectuons le roulement de C sur C′ et construisons l'enveloppe D′ de toutes les positions de D. Ce sera une surface constamment tangente à D et qui peut être prise pour dent conjuguée. Le contact s'exerce alors à chaque instant tout le long d'une certaine ligne λ.

Si, par exemple, la dent D est plane, D′ sera une surface développable et λ une ligne droite. Si elle est sphérique, D′ sera une surface canal et λ un cercle. Si elle est cylindrique, parallèle aux axes, D′ sera de même un cylindre parallèle aux axes et λ une génératrice. On retrouvera ainsi, comme cas particulier, la solution précédente.

93. Mais on peut généraliser encore davantage. En effet, après avoir choisi arbitrairement une surface D, traçons-y une ligne quelconque δ. Lorsque C roulera sur C′, cette courbe laissera sur la surface D′ une trace δ'. Imaginons maintenant deux surfaces Δ et Δ′ qui se raccordent tangentiellement avec D et D′ tout le long de δ et δ', mais

quelconques du reste. Elles pourront encore former un couple de dents conjuguées.

En effet, dans une position quelconque la courbe de contact λ rencontre δ en un certain point M. C'est lui qui marque actuellement sa trace pour former un point correspondant de δ'. Or Δ et D sont tangentes tout le long de δ et par suite en M; Δ' et D' le sont pour la même raison. Mais D et D' se raccordent tout le long de λ, par conséquent aussi en M, ce qui montre que Δ et Δ' se touchent elles-mêmes en ce point. Ce sont donc deux surfaces qui restent constamment tangentes pendant le mouvement. Mais le contact n'a plus lieu alors que par un seul point.

94. Engrenage de roulement (1). — On a cherché à construire des rouages qui fonctionnent par simple roulement. Si on cherche à y parvenir en employant le contact tout le long d'une ligne, la question est posée comme pour le problème des galets et reproduit les mêmes solutions (chap. I et II).

Si on emploie au contraire le contact par un seul point, il suffit, pour qu'il y ait roulement, que ce point appartienne à l'axe instantané, c'est-à-dire que le contact ne sorte jamais des cylindres primitifs. D'après cela, traçons sur C une courbe quelconque d et envisageons la trace d' qu'elle imprime sur C' par le roulement. Menons dans une direction quelconque oblique sur les cylindres un élément rectiligne infiniment court par le point commun à d et d' qui appartient à l'axe instantané actuel. Si nous fai-

(1) Ces organes sont à proprement parler des galets; mais ils se distinguent de ceux que nous avons déjà étudiés (chap. I et II) en ce que le contact n'a plus lieu que par un point et non suivant une ligne. J'ai préféré, pour cette raison, les séparer nettement des précédents et les laisser à cette place, où ils se présentent très-naturellement.

sous cela pour chaque instant en laissant même varier d'une manière continue l'inclinaison de cet élément, nous décrirons par rapport aux deux corps deux zones infiniment étroites qui se touchent constamment sur les cylindres primitifs. En effet, elles ont actuellement en commun l'élément qui les décrit toutes les deux, et celui qui appartient à la fois à d et d'. Cela fait, si nous prolongeons arbitrairement l'élément générateur par deux courbes quelconques $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{D}'$ qui soient seulement assujetties à varier elles-mêmes d'une manière continue, elles décriront deux surfaces D et D′ qui remplissent les conditions voulues.

95. Exemple. — *Engrenage de White.* — Cet appareil a été réalisé par Hooke et construit de nouveau par White en simplifiant, autant que possible, les moyens de solution.

Les cylindres primitifs sont circulaires (*Pl. VII, fig.* 108). La directrice d est une hélice, il en est par suite de même de d'. L'élément générateur garde constamment la même inclinaison et reste situé dans le plan des deux axes. Il décrit ainsi deux zones tangentes à des héliçoïdes gauches. L'engrenage de White est donc celui de deux vis excessivement étroites ou mieux de deux surfaces se raccordant avec elles le long d'une hélice. On l'appelle aussi engrenage de roulement ou engrenage de précision. On ne l'emploie guère, en effet, que dans les appareils de précision, car il est alors encore plus nécessaire d'atténuer les frottements, et dans les machines de force, la pression mutuelle ne s'exerçant que par un seul point désorganiserait la matière dans les environs.

M. Breguet a employé avec succès ces engrenages pour réaliser des vitesses angulaires tout à fait exceptionnelles, d'environ huit mille tours par seconde.

§ II.

AXES CONCOURANTS.

96. Engrenages coniques. — Lorsque les deux axes se rencontrent en un même point, le mouvement relatif, s'effectuant autour d'un point fixe qui est l'intersection des deux axes, peut être assimilé au roulement simple de deux cônes qui seraient les lieux de l'axe instantané dans l'espace absolu et dans la figure mobile (XI). On les appelle *cônes primitifs*. Nous en avons vu la théorie sous le titre de *galets coniques*.

Dans le cas particulier où le rapport des vitesses angulaires est constant, ces cônes sont de révolution (4).

97. La solution la plus naturelle consiste dès lors à adopter pour surfaces des dents d'autres cônes ayant le même sommet et des directrices convenables. On les appelle *engrenages coniques* ou *roues d'angle* (*Pl. VII, fig.* 109). Si l'on coupe tout l'ensemble par une sphère concentrique d'un rayon quelconque, on n'aura plus à considérer que les traces de ces différents cônes.

Nous nous trouvons ainsi ramenés à établir une théorie des *engrenages sphériques* semblable à celle des engrenages plans. Ses raisonnements seraient identiques à ceux que nous avons exposés, et je ne m'arrêterai pas à les développer de nouveau. Il suffira de remplacer partout les droites par des arcs de grands cercles, les épicycloïdes, les développantes, etc., par des épicycloïdes sphériques, des développantes sphériques, etc.

Ajoutons que, pour compléter la solution de la question, l'intervention des procédés de la Géométrie descriptive devient nécessaire. Le problème est posé dans chaque cas par la théorie qui précède, et c'est à cette science qu'il appartient de déterminer d'après cela les projections des roues

et le développement des panneaux. Ces détails se trouvent dans tous les ouvrages qui traitent des Applications de la Géométrie descriptive.

98. J'indiquerai ici de préférence un procédé beaucoup plus simple, dû à Tredgold, à la vérité approximatif, mais le seul usité dans la pratique. Nous le restreignons, bien entendu, au cas des cônes primitifs circulaires. Il est fondé sur ce que, pour des raisons que nous avons expliquées (XXV), les dents sont toujours petites, de sorte que le contact s'éloigne peu des cônes primitifs et du plan des axes.

Représentons ces derniers (*Pl. II, fig.* 33) par AOP et AO'P' et par AΩR l'axe résultant qui forme actuellement l'arête de contact des cônes primitifs QAR, Q'AR. Menons, par le point R, deux plans à angle droit sur les axes. Ils déterminent dans les cônes deux bases circulaires projetées sur QR, Q'R. J'élève encore un autre plan perpendiculaire sur celui de la figure suivant PRP'. Puis je prends ses points d'intersection P et P' avec les axes comme sommets de deux autres cônes qui auront pour directrices les cercles QR et Q'R, et seront ainsi opposés base à base avec les cônes primitifs. Ces cônes auxiliaires auront pour plan tangent commun le plan PRP', et, si on leur fait suivre le mouvement des cônes primitifs, l'arête de contact PRP' s'écartera peu de ce plan pendant toute la durée du passage d'un couple de dents, puisque nous l'avons supposée très-courte. On peut donc admettre, par approximation, que les choses se passent pour les engrenages sphériques comme elles se passeraient pour des engrenages plans tracés dans ce plan PRP'.

On n'aura, d'après cela, qu'à supposer les cônes auxiliaires développés suivant les secteurs QRP et Q'RP' (*Pl. II, fig.* 34), et à appliquer textuellement la théorie des engre-

nages plans et les divers modes de tracé qu'elle nous a fournis. La seule particularité qu'il soit nécessaire d'observer consiste à prendre pour pas une partie aliquote des *secteurs primitifs*, et non de leurs circonférences entières. Si on enroule après coup les deux parties de l'épure sur les cônes auxiliaires, on obtiendra les directrices des dents.

99. SOLUTION GÉNÉRALE. — En reproduisant textuellement les raisonnements des §§ 92 et 93 avec la précaution d'y remplacer les cylindres par les cônes primitifs, on formera des solutions plus générales dans lesquelles le contact s'effectuera, soit suivant une ligne, soit par un seul point.

On peut encore, comme au § 94, obtenir, pour le cas des axes concourants, des engrenages qui fonctionnent par simple roulement. Il est important de signaler leur existence, car on n'en saurait plus trouver de semblables dans le cas qu'il nous reste à considérer.

§ III.

AXES NON CONCOURANTS.

100. SOLUTION GÉNÉRALE. — Lorsque les deux axes ne sont pas situés dans le même plan, le mouvement résultant peut être reproduit par le roulement mutuel de deux surfaces réglées qui sont les lieux de l'axe spontané dans l'espace absolu et dans la figure mobile, ce roulement étant accompagné à chaque instant d'un glissement le long de la génératrice autour de laquelle il s'effectue (XIII).

La détermination de ces surfaces est facile dans le cas où le rapport des vitesses angulaires doit rester constant. En effet, pour chacune d'elles la génératrice conserve, par rapport à l'axe, une distance et une inclinaison constantes; car ces deux éléments ne dépendent, d'après la règle de la

composition des rotations (XIX), que de la position respective des axes et du rapport des vitesses angulaires. Ce sont donc des *surfaces gauches de révolution* ou *des hyperboloïdes de révolution à une nappe*. Nous les appellerons *hyperboloïdes primitifs*.

Ce mode de communication est employé depuis longtemps dans les filatures, ou du moins on y voit des organes construits à peu près sur ce modèle et munis de stries pour mieux assurer la transmission du mouvement (1).

101. En reproduisant pour les surfaces réglées primitives les raisonnements qui ont été faits déjà pour les cylindres (92 et 93) et pour les cônes primitifs (99), nous obtiendrons des solutions générales dans lesquelles le contact s'effectuera, soit suivant une ligne, soit par un seul point.

Il est bien essentiel de remarquer qu'on ne pourra plus, comme ci-dessus (94 et 99), obtenir des engrenages qui fonctionnent par simple roulement. Il faudrait, en effet, pour cela que, dans le mouvement relatif, les points de contact eussent une vitesse nulle; or ce mouvement est à chaque instant héliçoïdal (XIX) et ne peut jamais se réduire à une rotation simple. Par suite, ceux des points pour lesquels la vitesse est minimum sont les points de l'axe spontané, et ils possèdent encore le mouvement de translation de cette espèce de vis le long de son écrou (2).

---

(1) M. Belanger a appelé l'attention sur ces appareils dans une Note insérée aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, dans la séance du 28 janvier 1861.

(2) C'est pour cette raison que les surfaces réglées des galets sont nécessairement des cônes ou des cylindres (2). En effet, les axes devant être, pour que le roulement soit possible, concourants ou parallèles, leur point de concours est immobile; il appartient donc à tous les axes instantanés, et ceux-ci, c'est-à-dire les génératrices, ne peuvent former qu'un cône ou comme limite un cylindre.

Il ne se présente pas non plus dans ce cas de solution générale aussi naturellement indiquée que celle des engrenages cylindriques et coniques pour les précédents. On ne peut que recourir à des combinaisons particulières que je vais indiquer, et pour lesquelles on suppose les cylindres primitifs circulaires.

Il serait, du reste, à peu près inutile de se livrer à des recherches par trop compliquées sur ce sujet, car on peut toujours éviter, dans la composition des machines, d'avoir à considérer des axes non-concourants. Il suffit pour cela de les relier par un arbre intermédiaire qui les rencontre tous les deux, et d'établir entre lui et chacun des proposés deux répétitions de roues d'angle.

102. Exemple I. — *Vis sans fin.* — On emploie depuis Pappus (1) l'engrenage de la *vis sans fin* pour réunir deux axes non-concourants rectangulaires. On adopte arbitrairement pour l'un d'eux un héliçoïde gauche à plan directeur ou surface de vis à filet carré. Il est alors facile de trouver la surface conjuguée.

Prenons pour plan de la figure celui qui serait mené par l'axe O de la *vis* à angle droit sur celui O′ de la *roue* (*Pl. III, fig.* 35). L'héliçoïde sera actuellement coupé par ce plan suivant une certaine génératrice D. La rotation aura pour effet d'amener successivement différentes génératrices dans le plan, de sorte que la trace de la surface sera une droite animée d'un mouvement de translation ou, si l'on veut, le flanc d'une crémaillère C. Or, si les surfaces sont constamment tangentes, il en doit être de même de leurs traces. Par suite, celle de la surface inconnue doit être la dent de la roue conjuguée de la crémaillère à flancs, c'est-à-dire (76) une développante D′ du cercle primitif C′.

(1) Pappus, *Collections mathématiques*, liv. VIII, prop. 24.

Mais il ne suffit pas pour que les surfaces engrènent que leurs traces restent en contact. Il faut encore que les deux plans tangents coïncident. Or le point de contact se trouve (75) en M au pied de la perpendiculaire abaissée de Ω sur la dent D. Il parcourt donc la droite C. Mais le long d'une droite parallèle à l'axe d'un héliçoïde à plan directeur le plan tangent reste parallèle à lui-même. Ainsi donc le plan tangent à la vis qui doit coïncider avec celui de la dent de la roue garde une inclinaison constante sur le plan de la figure.

On peut, d'après cela, considérer la dent conjuguée comme l'enveloppe d'un plan dont la trace reste tangente à une développante de cercle, et qui conserve une inclinaison constante sur le plan de cette développante (1). L'invariabilité de cette inclinaison montre que l'intersection de deux plans consécutifs fera elle-même un angle constant avec le plan de base. L'arête de rebroussement sera donc déjà une courbe d'égale pente. De plus cette intersection doit couper le plan de base à la rencontre des deux traces consécutives, ou au point M de l'enveloppe. Enfin elle est évidemment perpendiculaire sur cette trace D et se projette par suite à angle droit en MΩ, c'est-à-dire sur la tangente au cercle C′. Mais si la projection de la génératrice enveloppe ce cercle, l'arête de rebroussement est tracée sur le cylindre dont il forme la base, et comme elle a déjà une inclinaison constante, il s'ensuit que cette courbe est une hélice. La surface conjuguée est donc un héliçoïde développable.

(1) Il n'est pas même indispensable d'adopter la surface développable qui forme l'enveloppe du plan mobile. Toute surface se raccordant avec elle le long de la développante satisferait également à la question, puisque le contact a toujours lieu sur cette courbe. On rencontre souvent des pignons creusés en forme de gorge de manière à épouser plus complétement la forme de la vis.

103. On donne souvent à la vis plusieurs filets distincts, ce qui se fait en disposant plusieurs vis égales à des intervalles égaux qui soient une même fraction de leur pas commun.

Si l'on imagine, d'après cela, un cylindre d'un diamètre notable sur lequel on a taraudé un grand nombre de filets, et qu'au lieu de lui laisser une longueur de plusieurs pas en forme de vis sans fin, on le coupe par deux plans assez rapprochés qui ne laissent sur chaque filet qu'une fraction de spire, on obtient une véritable roue qui porte le nom d'*engrenage héliçoïdal,* et dont la nature géométrique est la même que celle de la vis sans fin.

104. EXEMPLES II ET III. — *Engrenages d'Olivier.* — Considérons maintenant deux axes quelconques O, O′ dont le premier peut toujours être supposé vertical. Menons un plan P qui leur soit parallèle et décrivons autour des axes deux cylindres de révolution C, C′ tangents à ce plan.

Figurons la projection O_1 de l'axe O sur P et enroulons-la sur le cylindre C′ en forme d'hélice h'. On adopte pour l'axe O′ l'héliçoïde développable H′ dont elle serait l'arête de rebroussement et dont C′ forme le cylindre de jour. Le plan P tangent à C′ coupe cet héliçoïde suivant une génératrice qui n'est autre que O_1. La rotation de C′ amènera d'ailleurs successivement dans ce plan diverses génératrices qui toutes viendront se placer verticalement, car ce sont les tangentes d'une même hélice, et l'une d'elles O_1 est verticale. Le plan tangent à H′ est le plan osculateur de son arête de rebroussement h'. Or le plan osculateur d'une hélice est déterminé par la condition de contenir la tangente O_1 de cette courbe et la perpendiculaire au plan tangent P de son cylindre. C'est donc un plan vertical perpendiculaire à P. Ainsi le plan tangent se transporte parallèlement à lui-

même et peut être considéré comme le flanc d'une crémaillère. Par conséquent (82) la surface conjuguée est celle d'une roue cylindrique à développantes.

105. On peut aussi construire un autre modèle dans lequel les deux roues soient de même nature. On trace pour cela dans le plan P une droite quelconque d, qu'on enroule sur C et C′ sous forme de deux hélices h et h', puis on adapte aux axes O et O′ les héliçoïdes développables H et H′ dont elles sont les arêtes de rebroussement. Ces surfaces couperont le plan P suivant une de leurs génératrices qui sera pour toutes les deux la droite d. Leurs plans tangents devant l'avoir pour trace et être perpendiculaires à P coïncideront, et par suite ces deux surfaces engrèneront continuellement.

Cette combinaison a été réalisée par M. Vennin, à Lille, dans une machine à fraiser les engrenages.

CHAPITRE VIII.

TRAINS D'ENGRENAGES.

§ I.

MÉTHODE EXACTE.

106. Cherchons maintenant à apprécier le rôle des engrenages dans la composition des machines. Nous les rangerons, à cet égard, dans les trois groupes suivants :

PREMIÈRE CATÉGORIE. — *Trains ordinaires.*

DEUXIÈME CATÉGORIE. — *Trains épicycloïdaux.*

TROISIÈME CATÉGORIE. — *Trains irréguliers.*

Dans la première catégorie chaque roue tourne autour de son centre, et le rapport des vitesses angulaires est constant. Il s'agit de l'évaluer pour un train quelconque.

Je supposerai d'abord un *train simple,* c'est-à-dire composé uniquement de deux roues dont la plus grande est appelée à proprement parler la *roue,* et l'autre le *pignon.* Les rotations seront de même sens ou de sens contraire, suivant que les engrenages seront intérieurs (1) ou extérieurs. Nous savons (3) que le rapport des vitesses angulaires est égal à l'inverse de celui des rayons des cercles primitifs. Mais les rayons sont comme les circonférences et

(1) Les engrenages intérieurs sont peu employés, attendu qu'ils ne comportent pas le tracé à flancs réciproques (81) et que, de plus, on ne peut les installer qu'à un bout d'arbre. Si, en effet, leur arbre les traversait de part en part, il s'engagerait dans les rayons de la grande roue.

celles-ci comme les modules n et n', car le pas est le même pour les deux. On peut donc écrire

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{n'}{n},$$

ou sous cette autre forme

$$n\omega = n'\omega'.$$

La substitution des modules aux rayons primitifs est avantageuse en ce qu'il est toujours aisé de compter les dents d'une roue, tandis que son rayon primitif peut être difficile à apercevoir ou n'être pas accessible.

107. Considérons maintenant un *train complexe* quelconque. Je supposerai une série de $k+1$ arbres,

$$A_0,\ A_1,\ A_2,\ A_3 \ldots A_{k-3},\ A_{k-2},\ A_{k-1},\ A_k,$$

dont je représente les vitesses angulaires par

$$\omega_0,\ \omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3 \ldots \omega_{k-3},\ \omega_{k-2},\ \omega_{k-1},\ \omega_k.$$

On installe sur chaque arbre intermédiaire une roue et un pignon de modules N et n. Mais les deux arbres extrêmes ne portent l'un qu'une roue et l'autre qu'un pignon. Nous représenterons un tel équipage de la manière suivante, en plaçant sur la même ligne horizontale les deux roues qui engrènent ensemble et sur la même verticale celles qui sont montées sur le même arbre.

N_0 — n_1
N_1 — n_2
N_2 — n_3
. . . . . .
. . . . . .
N_{k-3} — n_{k-2}
N_{k-2} — n_{k-1}
N_{k-1} — n_k.

Si nous appliquons à chaque couple l'équation précédente, il viendra

$$\begin{aligned}
N_0\omega_0 &= n_1\omega_1,\\
N_1\omega_1 &= n_2\omega_2,\\
N_2\omega_2 &= n_3\omega_3,\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\\
N_{k-3}\omega_{k-3} &= n_{k-2}\omega_{k-2},\\
N_{k-2}\omega_{k-2} &= n_{k-1}\omega_{k-1},\\
N_{k-1}\omega_{k-1} &= n_k\omega_k.
\end{aligned}$$

Pour éliminer les inconnues auxiliaires, il suffit de multiplier membre à membre. Il vient ainsi

$$\omega_0 . N_0 N_1 N_2 \ldots N_{k-3} N_{k-2} N_{k-1} = \omega_k . n_1 n_2 n_3 \ldots n_{k-2} n_{k-1} n_k;$$

d'où on tire le rapport cherché

$$\frac{\omega_0}{\omega_k} = \frac{n_1 n_2 n_3 \ldots n_{k-2} n_{k-1} n_k}{N_0 N_1 N_2 \ldots N_{k-3} N_{k-2} N_{k-1}}.$$

Dans le cas particulier où toutes les roues seraient identiques, ainsi que les pignons, la formule devient

$$\frac{\omega_0}{\omega_k} = \left(\frac{n}{N}\right)^k. \tag{1}$$

108. On peut, au sujet d'un équipage de roues, se proposer deux problèmes distincts.

En premier lieu, un train étant construit, déterminer son rapport de vitesses. Cette question ne présentera aucune difficultés puisqu'il suffit d'évaluer les nombres de dents et de les substituer dans la formule précédente.

On peut inversement chercher à construire un équipage qui réalise un rapport donné. Ce problème, beaucoup plus difficile, exigera, au contraire, d'assez grands développements. Je commencerai par prendre un exemple de l'un et de l'autre.

EXEMPLE I. — Comme exemple du premier problème, nous chercherons le rapport de vitesses dans la *machine à aléser* les cylindres.

Sur un arbre P est calée une roue A de m dents, plus loin un manchon B de n dents taraudé en écrou à son intérieur et monté librement sur le même arbre fileté en vis; il est pris d'ailleurs entre les joues fixes d'un palier, de manière à ne pouvoir que tourner sur place, tandis que l'arbre a la faculté de se transporter dans sa longueur. De cette manière l'arbre et lui peuvent tourner, mais si ce n'est pas de la même quantité, le premier sera obligé de se transporter dans sa propre direction. Sur un arbre parallèle P sont calés un long pignon (1) A' de $m+1$ dents et une roue B' de n dents.

Nous avons donc là un train de trois arbres, le premier est P, le second P' et le dernier le manchon concentrique à P, mais indépendant. Le rapport des vitesses angulaires sera par suite

$$\frac{\omega_0}{\omega_2} = \frac{m.n}{(m+1).n} = 1 - \frac{1}{m+1}.$$

Il s'en faut donc de la quantité $\frac{1}{m+1}$ que l'arbre et le manchon exécutent tour pour tour, et, par suite, le premier éprouvera pour chaque révolution un déplacement longitudinal de $\frac{1}{m+1}$ du pas de la vis.

On prend en général m assez grand et le pas assez faible, et on obtient ainsi un déplacement extrêmement lent. Ce mécanisme est appelé, pour cette raison, *engrenage différentiel*.

(1) On appelle *long pignon* une roue dont les dents présentent une grande longueur, suivant les génératrices, ou en quelque sorte un cylindre cannelé. De cette manière, une autre roue peut se transporter dans toute sa longueur sans cesser d'engrener avec lui.

Exemple II. — Comme exemple du second problème, je chercherai les rayons que l'on doit donner aux roues d'une *cisaille à recéper* les pieux (*Pl. VII, fig.* 110).

Les deux branches de cette cisaille sont montées sur un même arbre et munies de secteurs R, r. Sur un autre arbre sont installées deux roues R′ et r' qui engrènent avec ces derniers. De plus, on se propose de faire mouvoir les deux branches en sens inverses et avec la même vitesse. Pour cela l'un des engrenages doit être intérieur et l'autre extérieur, et le rapport des vitesses angulaires égal à l'unité.

On posera donc, en appliquant la formule fondamentale et substituant les rayons primitifs aux modules,

$$1 = \frac{R}{R'} \cdot \frac{r'}{r},$$

c'est-à-dire

$$\frac{R}{r} = \frac{R'}{r'}.$$

Si on joint à cette relation la condition de tangence

$$R - r = R' + r',$$

on en tire, pour les secteurs en fonction des roues,

$$R = \frac{R' + r'}{R' - r'} R', \quad r = \frac{R' + r'}{R' - r'} r',$$

ou pour les roues en fonction des secteurs,

$$R' = \frac{R - r}{R + r} R, \quad r' = \frac{R - r}{R + r} r.$$

109. Problème de Young. — Proposons-nous, dans les conditions les plus générales, de réaliser un rapport donné de vitesse. Il est clair que *le rapport proposé ne peut être que celui de deux nombres entiers*, puisque ses termes sont, comme on vient de le voir, le produit de pareils nombres.

Si le numérateur et le dénominateur sont très-simples,

c'est-à-dire ni trop grands ni trop petits (1), on pourra se contenter d'une roue et d'un pignon dont ils seront les modules.

Si on a, au contraire, des nombres assez considérables, l'emploi d'un équipage complexe est indispensable. La solution la plus naturelle consiste alors à supposer toutes les roues identiques entre elles, ainsi que les pignons.

Si nous représentons par a le rapport de vitesses qu'il s'agit de réaliser et par x le rapport arbitraire des modules

$$\frac{\omega_0}{\omega_k} = a, \quad \frac{n}{N} = x,$$

la formule (1) devient

$$a = x^k,$$

ou, en résolvant à l'aide des logarithmes népériens,

$$k = \frac{La}{Lx}.$$

Young a cherché à déterminer x par la condition de rendre minimum le nombre total des dents du train :

$$k(n+N) = k(Nx+N) = kN(1+x) = N.La.\frac{1+x}{Lx}.$$

Égalons pour cela sa dérivée à zéro,

$$N.La.\frac{Lx - \frac{1+x}{x}}{L^2x} = 0.$$

(1) Il y a, en effet, un minimum qu'on ne peut dépasser sans rendre le tracé de l'épure impossible. Des calculs assez compliqués ont fourni à Savary les limites suivantes, dans lesquelles ρ désigne le rapport des modules de la roue et du pignon :

$7 + 4\rho$ engrenage à lanterne;
$16 + 2\rho$ engrenage à développantes;
$10(1+\rho)$ engrenage à flancs.

N ne saurait être nul, non plus que La, puisque a n'est jamais l'unité, sans quoi il n'y aurait pas problème. De plus Lx ne peut être infini, ce qui exigerait que x fût nul ou infini, c'est-à-dire que n ou N fussent nuls. Il faut donc poser

$$Lx = 1 + \frac{1}{x}.$$

En résolvant par approximation cette équation transcendante, on trouve

$$x = 3,59.$$

Si l'on prend la valeur 3,60, elle s'exprimera par le rapport des nombres 18 et 5 ou 36 et 10, parfaitement convenables comme modules d'une roue et d'un pignon.

En formant les puissances successives de ce nombre, nous trouverons

$k =$	1	2	3	4	5...
$a = x^k =$	3,60	12,96	46,66	167,98	604,73....

Si donc le rapport proposé a précisément l'une de ces valeurs, la meilleure solution sera celle de Young, dans laquelle on fera entrer un nombre de roues de 36 et de pignons de 10 fourni par la valeur correspondante de k.

110. S'il en est autrement, le rapport proposé ne doit pas cesser d'être exprimé par une fraction ordinaire que l'on peut toujours supposer irréductible. On en décomposera les termes en leurs facteurs premiers (1). S'il s'en trouve le même nombre au numérateur et au dénominateur et qu'ils ne soient ni trop grands ni trop petits, on les prendra pour modules d'après la formule générale.

Sinon on aura la ressource de multiplier les deux termes de la fraction par tels facteurs que l'on voudra.

---

(1) Pour faciliter cette opération, je placerai ici la liste des 169 nombres

Puis l'on fondra par multiplication ces coefficients avec les précédents, de manière à obtenir aux deux termes le même nombre de facteurs convenables pour former des modules. Il y a là un tâtonnement et un arbitraire impossibles à éviter.

On peut encore combiner les facteurs qui se trouvent en trop avec l'unité placée dans l'autre terme, en faisant engrener des vis sans fin à un seul filet avec des roues dont les modules soient représentés par ces facteurs.

§ II.

MÉTHODE D'HUYGHENS.

111. Si les deux termes ont de trop grands facteurs premiers, ou si le rapport est incommensurable, on ne peut

---

premiers inférieurs à 1000, qui suffit pour décomposer les nombres du premier million :

1,	2,	3,	5,	7,	11,	13,	17,	19,	23
29,	31,	37,	41,	43,	47,	53,	59,	61,	67
71,	73,	79,	83,	89,	97,	101,	103,	107,	109
113,	127,	131,	137,	139,	149,	151,	157,	163,	167
173,	179,	181,	191,	193,	197,	199,	211,	223,	227
229,	233,	239,	241,	251,	257,	263,	269,	271,	277
281,	283,	293,	307,	311,	313,	317,	331,	337,	347
349,	353,	359,	367,	373,	379,	383,	389,	397,	401
409,	419,	421,	431,	433,	439,	443,	449,	457,	461
463,	467,	479,	487,	491,	499,	503,	509,	521,	523
541,	547,	557,	563,	569,	571,	577,	587,	593,	599
601,	607,	613,	617,	619,	631,	641,	643,	647,	653
659,	661,	673,	677,	683,	691,	701,	709,	719,	727
733,	739,	743,	751,	757,	761,	769,	773,	787,	797
809,	811,	821,	823,	827,	829,	839,	853,	857,	859
863,	877,	881,	883,	887,	907,	911,	919,	929,	937
941,	947,	953,	967,	971,	977,	983,	991,	997.	

On abrégera beaucoup les recherches de ce genre en employant des tables de diviseurs. Celles de Barlow atteignent 10 000, celles de Chernac 1 020 000, enfin celles de Burckardt ont été poussées jusqu'à 3 036 000.

que procéder par approximation (1), en cherchant des fractions aussi simples et aussi peu différentes que possible de la proposée. On suivra pour cela une méthode employée pour la première fois par Huyghens et qui repose sur la théorie des fractions continues.

On développera sous cette forme le rapport proposé, on en calculera toutes les réduites et on choisira parmi elles la plus convenable. Si aucune n'est jugée telle, on aura recours aux réduites intercalaires.

On peut encore se procurer un grand nombre de fractions peu différentes de la proposée en opérant de la manière suivante. Soit $\frac{a}{b}$ le rapport et $\frac{a'}{b'}$ la dernière réduite. On peut leur substituer exactement $\frac{ak}{bk}$, $\frac{a'k'}{b'k'}$, quels que soient les valeurs et les signes des nombres entiers k et k'. Si ces fractions étaient rigoureusement égales entre elles, elles le seraient aussi à la suivante

$$\frac{ak + a'k'}{bk + b'k'}$$

qui est formée en les ajoutant terme à terme. Or elles sont peu différentes l'une de l'autre, et cette transformée est comprise entre les deux. Par suite on pourra, sauf une faible erreur, prendre cette dernière pour le rapport proposé. Il sera toujours bon, du reste, d'évaluer la différence pour se faire une idée du degré d'approximation obtenu (2). Quant au choix à faire pour les valeurs de k et k', on ne pourra que recourir à des tâtonnements en cherchant à former des fractions dont les deux termes se décomposent en facteurs premiers suffisamment simples.

---

(1) L'horlogerie de précision présente des cas où il est nécessaire de réaliser rigoureusement un rapport commensurable, mais très-compliqué. On emploie alors des appareils d'une nature spéciale, qu'on appelle rouages *différentiels* et *épicycloïdaux*, et qui feront l'objet du chapitre suivant.

(2) L'une quelconque de ces différences a pour valeur absolue, d'après la

112. EXEMPLE I. — *Rouage lunaire.* — Proposons-nous de relier deux axes dont l'un suive la révolution synodique de la lune, tandis que l'autre effectue sa rotation en douze heures. La valeur exacte de cette période est en temps moyen

$$29^j\,12^h\,44^m\,2^s,8032,$$

ou, en la rapportant au jour,

$$29^j,5306.$$

Comme d'ailleurs douze heures forment la moitié du jour, le rapport à réaliser est ici

$$\frac{29,5306}{0,5},$$

ou, en simplifiant,

$$\frac{147653}{2500},$$

et en mettant la composition des deux termes en évidence :

$$\frac{11.31.433}{2.2.5.5.5.5}.$$

Comme il est impossible d'admettre dans l'équipage une roue de 433 dents, nous devons renoncer à réaliser rigoureusement le rapport proposé.

Nous le développerons donc en fraction continue de la manière suivante :

$$59+\cfrac{1}{16+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{16+\frac{1}{3}}}}},$$

---

théorie des fractions continues,

$$\frac{a}{b}-\frac{ak+a'k'}{bk+b'k'}=\frac{k'(ab'-ba')}{b(bk+b'k')}=\frac{k'}{b(bk+b'k)}=\frac{1}{bb'+b^2\frac{k}{k'}}.$$

Si donc b et b' sont de grands nombres, l'erreur sera de l'ordre des inverses de leurs carrés, c'est-à-dire insignifiante.

et nous formerons les réduites

$$\frac{59}{1}=\frac{59}{1},$$
$$\frac{945}{16}=\frac{3.3.3.5.7}{2.2.2.2},$$
$$\frac{1949}{33}=\frac{1949}{3.11},$$
$$\frac{2894}{49}=\frac{2.31.37}{7.7},$$
$$\frac{48253}{817}=\frac{73.661}{19.43}.$$

La première fraction a été employée par Oughtred dès 1677. Elle ne correspond qu'à une période de $29\frac{1}{2}$ jours, et ne peut être considérée par conséquent que comme une première ébauche. Le second rapport a été construit par Ferguson; il se trouve en excès de $57^s,2$ par lunaison. Parmi les autres réduites la quatrième seule pourrait encore être employée; elle ne donne lieu qu'à une avance de $1^s,05$ sur chaque période.

En se servant des réduites intercalaires, on obtient les valeurs suivantes qui ont été indiquées par Willis :

$$\frac{2894.1+1949}{49.1+33}=\frac{4843}{82}=\frac{29.167}{2.41} \qquad \text{erreur } -8^s,60,$$
$$\frac{2894.6+1949}{49.6+33}=\frac{19313}{327}=\frac{7.31.89}{3.109} \qquad -0^s,60,$$
$$\frac{48253.2+2894}{817.2+49}=\frac{99400}{1683}=\frac{2.2.2.5.5.7.71}{3.3.11.17} \qquad +1^s,03.$$

On peut encore recourir à la formule générale

$$\frac{147653.k+48253.k'}{2500.k+817.k'}$$

pour retrouver des résultats dont la plupart ont été obtenus par d'anciens géomètres en suivant des voies toutes différentes. On arrive ainsi aux combinaisons suivantes :

VALEURS DE k	VALEURS DE k'	TRANSFORMÉE DU RAPPORT.	ERREUR PAR LUNAISON.	AUTEURS.
31	— 97	$\frac{103298}{1749} = \frac{2.13.29.137}{3.11.53}$	+ 0″,08	Willis, *Principles of Mechanism*, p. 235.
19	— 59	$\frac{41520}{703} = \frac{5.48.173}{19.37}$	— 0″,40	Francœur, *Mécanique élémentaire*, p. 146.
29	— 92	$\frac{157339}{2664} = \frac{7.7.13.13.19}{2.2.2.3.3.37}$	+ 0″,44	Camus, *Cours de Mathématiques, Roues dentées.*
11	— 35	$\frac{64672}{1095} = \frac{2.2.2.2.2.43.47}{3.5.73}$	+ 0″,48	Pearson, *Rees' Cyclopedia*, art. *Planetary numbers.*
29	— 89	$\frac{12580}{213} = \frac{2.2.5.17.37}{3.71}$	— 6″,18	Le P. Alexandre, *Traité général des Horloges*, p. 188.
76	— 233	$\frac{21321}{361} = \frac{9.23.103}{19.19}$	— 9″,84	

113. EXEMPLE II. — *Rouage solaire.* — Cherchons de même à relier deux axes, de manière que l'un donne le jour et l'autre l'année tropique, qui a pour valeur

$$365^j\,5^h\,48^m\,48^s,$$

ou, en la rapportant au jour,

$$365,2422222....$$

Le rapport à réaliser est donc, en revenant de la fraction périodique mixte à la forme ordinaire,

$$\frac{365242-36524}{900}=\frac{328718}{900}=\frac{164359}{450},$$

et en mettant les facteurs premiers en évidence

$$\frac{13.47.269}{2.3.3.5.5},$$

Malgré sa complication, cette forme a été employée par Pearson.

Pour avoir des résultats plus simples, sinon aussi exacts, développons en fraction continue

$$365+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\frac{1}{2}}}}}},$$

et formons les réduites successives

$$\frac{365}{1}=\frac{5.73}{1},$$

$$\frac{1461}{4}=\frac{3.487}{2.2},$$

$$\frac{10592}{29}=\frac{2.2.2.2.2.331}{29},$$

$$\frac{12053}{33} = \frac{17.709}{3.11},$$
$$\frac{46751}{128} = \frac{46751}{2.2.2.2.2.2.2},$$
$$\frac{58804}{161} = \frac{2.2.61.241}{7.23}.$$

La première a été construite par Oronce Finée vers 1700 (1); elle ne représente que l'année ordinaire de 365 jours. La dernière l'a été par Janvier; elle est compliquée, mais fort approchée, et ne pèche par excès que de $1^s,2$. Les autres fractions ne sauraient être utilisées.

En recourant aux réduites intercalaires, Willis a indiqué la valeur suivante :

$$\frac{58804.1+46751}{161.1+128} = \frac{105555}{289} = \frac{3.5.31.227}{17.17}.$$

Elle ne produit par an qu'un retard de $0^s,7$.

Si l'on forme encore l'expression générale, elle donne ici

$$\frac{164356.k+58804.k'}{450.k+161.k'}.$$

En faisant d'abord

$$k=7, \quad k'=-22,$$

on trouve

$$\frac{143175}{392} = \frac{3.5.5.23.83}{2.2.2.7.7},$$

---

(1) Oronce Finée se proposait de relier deux arbres dont les révolutions s'opéraient l'une en 3 et l'autre en 365 jours. Le rouage qu'il a employé est ainsi composé :

12 — 48
36 — 180
48 — 48
24 — 146.

On reconnaît de suite l'inutilité d'une pareille complication.

c'est la solution indiquée par le P. Alexandre, et depuis par Camus et Ferguson. Elle donne une avance de $10^s,69$. En faisant au contraire

$$k=3, \quad k'=-10,$$

on obtient ce résultat de Willis :

$$\frac{94963}{260}=\frac{11.89.97}{2.2.5.13},$$

qui se trouve aussi en excès de $7^s,38$.

§ III.

TABLES DE M. BROCOT.

114. Les méthodes précédentes sont compliquées et attendent beaucoup du tact personnel du calculateur, car elles laissent une grande indécision dans la direction du tâtonnement. M. Brocot a réussi d'une manière ingénieuse à simplifier ces recherches et à fournir sans aucun calcul une première approximation qui pourra souvent être jugée suffisante et qu'il sera toujours possible d'ailleurs de perfectionner dans chaque cas particulier. Dans ce but il a construit une table fondée sur un grand nombre de lemmes que nous pouvons réduire aux deux suivants :

LEMME I. — Lorsque deux fractions diffèrent de l'unité divisée par le produit de leurs dénominateurs, la fraction obtenue en les ajoutant terme à terme est la plus simple de toutes celles qui sont comprises entre les proposées.

Si nous supposons en effet

$$\frac{a}{b}-\frac{a'}{b'}=\frac{1}{bb'}$$

ou

$$ab'-ba'=1,$$

et si nous désignons par $\frac{m}{n}$ une fraction quelconque telle que l'on ait, par exemple,

$$\frac{a}{b} > \frac{m}{n} > \frac{a+a'}{b+b'},$$

nous tirerons de là

$$\frac{a}{b} - \frac{a+a'}{b+b'} > \frac{a}{b} - \frac{m}{n},$$

$$\frac{ab' - ba'}{b(b+b')} > \frac{an - bm}{bn},$$

$$\frac{1}{b+b'} > \frac{an - bm}{n},$$

D'ailleurs

$$an - bm \gtreqless 1,$$

multipliant par la précédente il reste

$$n > b + b',$$

et, par suite, en multipliant par la première inégalité,

$$m > a + a',$$

ce qui montre que la fraction $\frac{m}{n}$ a des termes plus compliqués que $\frac{a+a'}{b+b'}$.

LEMME II. — Lorsque deux fractions diffèrent de l'unité divisée par le produit de leurs dénominateurs, la fraction obtenue en les ajoutant terme à terme remplit la même condition par rapport à chacune d'elles.

Si nous supposons en effet

$$\frac{a}{b} - \frac{a'}{b'} = \frac{1}{bb'},$$

$$ab' - ba' = 1,$$

on aura identiquement

$$\frac{a}{b} - \frac{a+a'}{b+b'} = \frac{ab'-ba'}{b(b+b')} = \frac{1}{b(b+b')},$$

ce qu'il fallait démontrer.

115. Si nous remarquons maintenant que $\frac{0}{1}$ et $\frac{1}{1}$ sont des fractions qui remplissent les conditions voulues, il suit de ces deux lemmes que la fraction $\frac{0+1}{1+1} = \frac{1}{2}$ est la plus simple de toutes celles qui sont comprises entre elles et qu'elle remplit encore avec chacune d'elles les mêmes conditions. Par conséquent

$$\frac{0+1}{1+2} = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \frac{1+1}{2+1} = \frac{2}{3}$$

seront les fractions les plus simples que l'on puisse insérer entre la troisième et chacune des deux premières, et elles rempliront avec leurs deux voisines les conditions en question; et ainsi de suite indéfiniment.

En suivant cette marche M. Brocot a formé toutes les fractions qui se présentent successivement et dont le dénominateur ne dépasse pas 100. Il les a converties en décimales à dix figures et disposées en forme de table. Celle-ci renferme trois colonnes, dont l'une donne la valeur décimale et les deux autres le numérateur et le dénominateur. On possède par là une série de 3053 fractions dont les termes n'ont que deux chiffres et dont chacune remplit, par rapport aux deux voisines, la condition que leur différence soit égale à l'unité divisée par le produit des dénominateurs. Cette différence est, bien entendu, variable, mais on peut s'en faire une idée par sa valeur moyenne qui sera,

d'après le nombre de ces fractions, $\frac{1}{3054}$ ou avec dix figures 0,0003274394 (1).

116. Pour se servir de cette table on commencera si le rapport proposé n'est pas moindre que l'unité par l'y ramener. On pourra, pour cela, soit le renverser, soit considérer à part la partie fractionnaire. Après l'avoir réduit en décimales on cherchera si par hasard il se trouverait exactement dans la table, et dans le cas contraire on notera les deux valeurs qui le comprennent. Si la plus voisine ou, à son défaut, si l'autre est décomposable en facteurs convenables et si elle est suffisamment approchée, on pourra s'en tenir là.

S'il n'en est pas ainsi, on se servira des deux valeurs voisines qui remplissent les conditions fondamentales pour resserrer davantage l'approximation en les ajoutant terme pour terme d'après l'application des deux lemmes précédents. Et l'on continuera ainsi jusqu'à ce que l'on obtienne une fraction dont les termes soient convenablement décomposables et dont l'approximation soit jugée suffisante.

117. La formation successive des fractions est des plus

---

(1) Ces tables ont été publiées à la fin du fascicule de M. Brocot. J'en donnerai le spécimen suivant pour faciliter l'intelligence de l'exemple numérique que je prends plus loin :

N.	D.	Fraction décimale.
61	63	0,9682539683
92	95	0,9684210526
31	32	0,96875 00000
94	97	0,9690721649
63	65	0,9692307692
95	98	0,9693877551
32	33	0,9696969697
97	100	0,9700000000
65	67	0,9701492537
33	34	0,9705882353

simples, mais il n'en serait pas de même du calcul de l'erreur si l'on devait pour la trouver réduire en décimales par la division tous les rapports trouvés. Mais on peut facilement obtenir ces erreurs sous la forme de fractions ordinaires par des additions et soustractions convenablement dirigées. C'est ce qui résulte du lemme suivant :

LEMME III. — Lorsqu'un rapport est représenté approximativement par deux fractions qui le comprennent et qu'on ajoute celles-ci terme à terme, la nouvelle erreur se déduit des deux premières en ajoutant de même les valeurs absolues de leurs dénominateurs et les valeurs algébriques de leurs numérateurs.

Soit, en effet, un rapport $\frac{A}{B}$ représenté approximativement par les deux fractions

$$\frac{a}{b} > \frac{A}{B} > \frac{a'}{b'}.$$

Les erreurs respectives sont, en mettant leurs signes en évidence,

$$\frac{A}{B} - \frac{a}{b} = -\frac{aB - bA}{bB},$$

$$\frac{A}{B} - \frac{a'}{b'} = +\frac{b'A - a'B}{b'B},$$

et l'erreur cherchée peut être mise sous la forme

$$\frac{A}{B} - \frac{a+a'}{b+b'} = \frac{(b'A - a'B) - (aB - bA)}{bB + b'B},$$

ce qui démontre le théorème.

118. *Exemple. — Rouage de Mercure.* — Cherchons à réaliser par un rouage le rapport 87,96926 qui représente la durée de la révolution sidérale de Mercure.

En séparant la partie fractionnaire 0,96926, nous trou-

vons dans la table comme nombres voisins,

$$0,96923 = \frac{63}{65}, \quad \text{erreur} \quad -0,00003,$$

$$0,96938 = \frac{95}{98}, \quad \text{erreur} \quad +0,00012.$$

On prendra donc

$$87 + \frac{63}{65} = \frac{5718}{65} = \frac{2.3.953}{5.13},$$

$$87 + \frac{95}{98} = \frac{8621}{98} = \frac{37.233}{2.7.7}.$$

La première fraction est assez approchée, mais elle renferme le facteur irréalisable 953. La seconde serait plus facile à construire, mais elle est moins exacte et on peut souhaiter une approximation plus satisfaisante. On formera pour cela la série :

$$\frac{5718+8621}{65+98} = \frac{14339}{163} = \frac{13.1103}{163},$$

$$\frac{5718+14339}{65+163} = \frac{20057}{228} = \frac{31.647}{2.2.3.19},$$

$$\frac{5718+20057}{65+228} = \frac{25775}{293} = \frac{5.5.1031}{293},$$

$$\frac{5718+25775}{65+293} = \frac{31493}{358} = \frac{7.11.409}{2.179},$$

$$\frac{5718+31493}{65+358} = \frac{37211}{423} = \frac{127.293}{3.3.47}.$$

Ce dernier rapport peut, à la rigueur, se construire avec des roues de 127 et de 293 et des pignons de 9 et de 47. L'erreur qu'il laisse n'est plus que de 0,000007 ou moins de $\frac{1}{17}$ de la précédente.

CHAPITRE IX.

ENGRENAGES ÉPICYCLOIDAUX.

§ I.

THÉORIE GÉNÉRALE.

119. CONSTITUTION DES TRAINS. — Nous distinguerons les roues en *concentriques* ou *épicycloïdales*, suivant que leur centre est fixe ou qu'il décrit lui-même un cercle. Le premier mode est évidemment le plus simple et le plus employé. Mais nous venons de voir qu'il ne répond pas à tous les besoins, et on est conduit, pour réaliser exactement des rapports de vitesse compliqués, imposés le plus ordinairement par une question d'horlogerie astronomique, à employer les roues épicycloïdales. Dès que l'une au moins des roues se trouve dans ces conditions, l'ensemble constitue un *train épicycloïdal*.

Cette catégorie présente les appareils les plus compliqués et, en apparence, les plus divers. On peut cependant y discerner un petit nombre de traits communs qui permettent d'en établir la théorie générale. Elle a été formulée pour la première fois par Willis. On s'y propose de calculer le rapport de vitesses angulaires des roues extrêmes, qui est constant comme dans les trains ordinaires.

120. Nous distinguerons dans un train épicycloïdal quelconque une *première roue* A et une *dernière roue* A'. La première est toujours concentrique, la dernière est concentrique ou épicycloïdale. Un *levier* L est concentrique à la première roue A. Il porte l'axe de la dernière A' et, en

outre, ceux des *roues intermédiaires* $A_1, A_2, A_3, \ldots$, que nous numérotons dans l'ordre de leur succession depuis la première jusqu'à la dernière roue. Disons, pour n'y plus revenir, que ce levier peut affecter des formes très-diverses, telles qu'une barre, une roue, etc. Il doit être léger, car ces appareils sont toujours délicats; on l'équilibre en outre par un contre-poids qui ramène le centre de gravité sur l'axe afin d'éviter les flexions et aussi l'accélération de la pesanteur quand le mouvement a lieu dans un plan vertical.

Si on fixe par la pensée le levier L, le mouvement relatif devient celui d'un train ordinaire, puisque tous les centres s'y trouvent placés. Ce train admet un rapport $\mathcal{A}$ de la vitesse angulaire de la dernière roue à celle de la première, qui sera, d'après la formule trouvée pour ce genre de trains (107) :

$$\mathcal{A} = \frac{aa_2a_4\ldots\ldots}{a_1a_3a_5\ldots a'}$$

en désignant par les lettres minuscules les modules des différentes roues. Ce rapport sera affecté d'un signe positif ou négatif suivant que A et A′ tournent en même sens ou en sens contraires, ce qui dépend, dans chaque cas, du nombre des roues et de leur position intérieure ou extérieure.

Je désignerai, en outre, par α, α' et λ les vitesses angulaires absolues de A, A′ et L. Pour fixer leurs signes on adoptera à volonté un sens positif. Parfois, à la vérité, ce train renferme des roues d'angle, mais cela n'introduit pas de difficulté, car les roues extrêmes et le levier ont toujours leurs axes parallèles.

121. Quelquefois les roues extrêmes sont indépendantes et on leur communique des vitesses arbitraires α et α', d'où résulte pour le levier une certaine vitesse λ. Ces appareils formeront un premier genre.

Le plus souvent, au contraire, il existe pour tout le sys-

tème un moteur unique M animé d'une vitesse absolue μ, et que je supposerai, pour plus de clarté, distinct des trois pièces essentielles A, A′ et L. Ce moteur est mis en connexion avec deux quelconques de ces trois pièces, et la troisième prend, d'après cela, un mouvement déterminé. Mais il peut, à cet égard, se présenter deux cas.

Dans un second genre le moteur agit sur les deux roues extrêmes par des trains ordinaires $B_1B_2B_3\ldots$ et $B'_1B'_2B'_3\ldots$, pour lesquels je désignerai par $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{B}'$ les rapports de vitesses pris de A à M et de A′ à M. On aura encore

$$\mathfrak{B}=\frac{b_1b_3b_5\ldots}{b_2b_4b_6\ldots},\qquad \mathfrak{B}'=\frac{b'_1b'_3b'_5\ldots}{b'_2b'_4b'_6\ldots},$$

en réglant d'ailleurs les signes, suivant que A et A′ auront ou non le sens de M que l'on peut prendre pour positif.

Dans un troisième genre le moteur agit sur la première roue et sur le levier par des trains ordinaires $B_1B_2B_3\ldots$ et $C_1C_2C_3\ldots$, dont je désignerai les rapports de vitesses par $\mathfrak{B}$ et Γ. Ils nous seront encore immédiatement connus sous la forme

$$\mathfrak{B}=\frac{b_1b_3b_5\ldots}{b_2b_4b_6\ldots},\qquad \Gamma=\frac{c_1c_3c_5\ldots}{c_2c_4c_6\ldots},$$

en fixant les signes de la même manière que tout à l'heure.

On ne saurait établir un quatrième genre pour le cas d'une connexion directe du moteur avec le levier et la dernière roue. Car cette connexion ne saurait exister si la dernière roue est épicycloïdale, et si elle est concentrique rien n'empêche d'en faire la première roue. Nous rangerons donc tous les trains épicycloïdaux dans les trois genres suivants :

PREMIER GENRE. — *Roues extrêmes indépendantes.*

DEUXIÈME GENRE.—*Connexion entre les roues extrêmes.*

TROISIÈME GENRE.— *Connexion entre la première roue et le levier.*

122. FORMULES FONDAMENTALES. — Les vitesses relatives des deux roues, par rapport au levier, seront évidemment $\alpha - \lambda$ et $\alpha' - \lambda$, et comme $\mathfrak{k}$ désigne leur rapport,

$$\mathfrak{k} = \frac{\alpha' - \lambda}{\alpha - \lambda},$$

d'où

$$\lambda = \frac{\mathfrak{k}\alpha - \alpha'}{\mathfrak{k} - 1}. \tag{1}$$

Telle est la formule fondamentale du premier genre, elle exprime λ en fonction linéaire des vitesses arbitraires α et α'.

Pour le second genre nous avons, par définition,

$$\alpha = \mathfrak{v}\mu, \quad \alpha' = \mathfrak{v}'\mu;$$

la formule (1) devient dès lors

$$\lambda = \frac{\mathfrak{k}\mathfrak{v} - \mathfrak{v}'}{\mathfrak{k} - 1}\mu, \tag{2}$$

elle exprime la vitesse du levier en raison directe de celle du moteur.

Nous avons de même, pour le troisième genre,

$$\alpha = \mathfrak{v}\mu, \quad \lambda = \Gamma\mu;$$

la formule (1) devient alors

$$\Gamma\mu = \frac{\mathfrak{k}\mathfrak{v}\mu - \alpha'}{\mathfrak{k} - 1},$$

et on en tire

$$\alpha' = [\mathfrak{k}\mathfrak{v} + (1 - \mathfrak{k})\Gamma]\mu, \tag{3}$$

pour exprimer la vitesse de la dernière roue en raison directe de celle du moteur.

On comprend, d'après cela, comment les trains épicycloï-

daux pourront se prêter à la réalisation de rapports exceptionnels pour lesquels les trains ordinaires ne sauraient convenir; car les formules ont complétement changé de nature, et, au lieu de la forme monôme, elles ont pris celle d'une somme ou d'une différence de fractions. On peut donc chercher à décomposer le rapport proposé en deux autres fractions dont les facteurs premiers se prêtent mieux que ceux du proposé à la composition des modules des roues. Indiquons rapidement la manière d'effectuer ce genre d'opérations.

123. DÉCOMPOSITION DES FRACTIONS. — On peut toujours supposer le dénominateur de la fraction proposée $\frac{m}{n}$ décomposable en trois facteurs, quand on devrait pour cela en introduire aux deux termes. De plus, chaque manière d'opérer cette décomposition pourra servir de point de départ au calcul que je vais indiquer.

Je suppose donc que l'on ait

$$n = pqr,$$

et je pose

$$m = px + qy,$$

d'où

$$\frac{m}{n} = \frac{x}{qr} + \frac{y}{pr},$$

ou, plus généralement,

$$\frac{m}{n} = \frac{x + qk}{qr} + \frac{y - pk}{pr}$$

en introduisant un nombre entier et arbitraire k positif ou négatif. Il suffira donc de trouver pour x et y un seul système de valeurs satisfaisant à la seconde équation. On aura pour cela recours à la théorie de l'analyse indéterminée qui fournira ce système de solutions, sous la seule réserve que

p et q soient premiers entre eux et avec m, ce qu'il est toujours facile d'obtenir.

124. EXEMPLE (1). — S'il s'agit, par exemple, de réaliser le rapport du temps sidéral au temps moyen

$$\frac{8401}{8424},$$

on le mettra d'abord sous la forme

$$\frac{31.271}{39.216},$$

et on décomposera, comme nous allons le voir, la seconde fraction dans les deux suivantes,

$$\frac{271}{216} = \frac{19}{24} + \frac{25}{54};$$

de sorte que le rapport proposé deviendra

$$\frac{31.19}{39.24} + \frac{31.25}{39.54}.$$

Pour opérer la décomposition de la seconde fraction, comme le numérateur est premier et que le dénominateur

$$216 = 2.2.2.3.3.3,$$

on peut prendre, en premier lieu,

$$216 = 4.9.6,$$

et poser

$$271 = 4x + 9y.$$

On satisfait à cette équation en prenant

$$x = -2, \quad y = 31,$$

(1) Cet exemple numérique est emprunté à Francœur.

ce qui donne d'une manière générale

$$\frac{271}{216} = \frac{-2+9k}{9.6} + \frac{31-4k}{4.6},$$
$$= \frac{31-4k}{24} + \frac{9k-2}{54},$$

et en particulier les décompositions suivantes :

$$k = -3 \ldots \frac{271}{216} = \frac{43}{24} - \frac{29}{54},$$
$$-2 \ldots\ldots\ldots \frac{39}{24} - \frac{20}{54},$$
$$-1 \ldots\ldots\ldots \frac{35}{24} - \frac{11}{54},$$
$$0 \ldots\ldots\ldots \frac{31}{24} - \frac{2}{54},$$
$$1 \ldots\ldots\ldots \frac{27}{24} + \frac{7}{54},$$
$$2 \ldots\ldots\ldots \frac{23}{24} + \frac{16}{54},$$
$$3 \ldots\ldots\ldots \frac{19}{24} + \frac{25}{54},$$

et ainsi de suite.

On peut prendre, en second lieu,

$$216 = 3.8.9,$$

et poser

$$271 = 3x + 8y.$$

Comme on satisfait par les valeurs

$$x = 93, \quad y = -1,$$

nous prendrons

$$\frac{271}{216} = \frac{93+8k}{8.9} + \frac{-1-3k}{3.9},$$
$$= \frac{93+8k}{72} - \frac{1+3k}{27},$$

ce qui fournit les décompositions suivantes :

$$k=-3\ldots\ \frac{271}{216}=\frac{69}{72}+\frac{8}{27},$$

$$-2\ldots\ldots\ \frac{77}{72}+\frac{5}{27},$$

$$-1\ldots\ldots\ \frac{85}{72}+\frac{2}{27},$$

$$0\ldots\ldots\ \frac{93}{72}-\frac{1}{27},$$

$$1\ldots\ldots\ \frac{101}{72}-\frac{4}{27},$$

$$2\ldots\ldots\ \frac{109}{72}-\frac{7}{27},$$

$$3\ldots\ldots\ \frac{117}{72}-\frac{10}{27},$$

et ainsi de suite.

§ II

EXEMPLES.

125. Premier genre. — Exemple I. — *Engrenage de Lahire.* — Le système est réduit à sa plus simple expression et comprend seulement le levier et les deux roues extrêmes (*Pl. VII, fig.* 111). La première roue est fixe :

$$\alpha=0.$$

La dernière a un rayon moitié moindre ; nous ferons donc

$$k=+\frac{a}{a'}=2,$$

avec le signe positif. En effet, la roulette tourne sur elle-même en sens contraire du levier, et, pour avoir le mouvement de la roue fixe par rapport au levier, il faut (XXI) lui

transporter la rotation de celui-ci en la changeant de sens. On a dès lors, par la formule (1),

$$\lambda = -\alpha'.$$

Ce résultat est facile à vérifier directement. D'abord la roulette et le levier tournent en sens contraires. Ensuite la roulette se déroule deux fois sur la circonférence fixe, et par conséquent elle exécute une seule rotation sur elle-même.

Ce système a été proposé par Lahire pour guider une tige de pompe en ligne droite. Nous avons vu, en effet (81), que dans ces conditions chaque point de la circonférence de la roulette décrit un diamètre du grand cercle.

126. EXEMPLE II. — *Plaque tournante.* — Les roues extrêmes sont égales, concentriques et manœuvrées à la main (*Pl. VII, fig.* 112) avec des vitesses arbitraires α, α',

$$\mathfrak{L} = -\frac{a}{a_1}\frac{a_1}{a'} = -1,$$

d'où, en appliquant la formule (1),

$$\lambda = \frac{\alpha + \alpha'}{2}.$$

Si, en particulier, on fait $\alpha' = 0$, le système devient identique à la plaque tournante des chemins de fer, et on retrouve le résultat connu (15)

$$\alpha = 2\lambda.$$

127. EXEMPLE III. — *Compteurs épicycloïdaux.* — On a (*Pl. VII, fig.* 113)

$$\mathfrak{L} = +\frac{a}{a_1}\cdot\frac{a_2}{a'},$$

et, par la formule (1),

$$\lambda = \frac{aa_2.\alpha - a'a_1.\alpha'}{aa_2 - a'a_1}.$$

Si, en particulier, la roue centrale est un guide fixe :

$$\alpha = 0,$$

et il vient

$$\frac{\alpha'}{\lambda} = 1 - \frac{aa_2}{a'a_1}.$$

On a employé, pour des compteurs décimaux, en premier lieu,

$$a = 101, \quad a' = a_1 = 100, \quad a_2 = 99,$$
$$\lambda = 10000.\alpha';$$

en second lieu,

$$a = 111, \quad a' = 10, \quad a_1 = 100, \quad a_2 = 9,$$
$$\lambda = 1000.\alpha'.$$

Si on prend, en désignant par k un nombre entier quelconque,

$$a = k - 1, \quad a' = k,$$

avec une seule roue intermédiaire, ce qui donne

$$a_1 = a_2,$$

on aura, d'une manière générale,

$$\lambda = k\alpha'.$$

128. Exemple IV. — *Paradoxe de Ferguson.* — Désignons par A′ l'une quelconque des trois pièces A′, A′$_1$, A′$_2$, qui jouent le rôle de dernière roue (*Pl. VII, fig.* 114). On aura

$$\lambda = +\frac{a}{a_1}\frac{a_1}{a'} = \frac{a}{a'}.$$

En outre, la première roue est un guide fixe :

$$\alpha = 0,$$

La formule (1) donne alors

$$\lambda = \frac{a'}{a' - a}.x'.$$

Par suite, suivant que a' sera supérieur, égal ou inférieur

à a, la roue épicycloïdale prendra une rotation de même sens que le levier, ou une translation, ou une rotation de sens contraire.

Le paradoxe apparent consistait à adopter des modules dont la différence était peu sensible à l'œil, de sorte que des roues, en apparence égales, prenaient cependant des mouvements différents. Ferguson employait les nombres suivants :

$$a = 20, \quad a' = 20, \quad a'_1 = 21, \quad a'_2 = 19,$$

$$\frac{\alpha'}{\lambda} = 0, \quad \frac{\alpha'_1}{\lambda} = \frac{1}{21}, \quad \frac{\alpha'_2}{\lambda} = -\frac{1}{19}.$$

129. EXEMPLE V. — *Mouche de Watt.* — La mouche ou roue planétaire de Watt est l'inverse du rouage de Lahire (*Pl. VIII*, *fig.* 115). La dernière roue est en translation :

$$\alpha' = 0,$$

et la première tourne sur son axe avec la vitesse α,

$$\mathfrak{s} = -\frac{a}{a'}.$$

On a par la formule (1)

$$\lambda = \frac{a}{a + a'}\alpha.$$

Watt employait deux roues égales :

$$a = a',$$

et obtenait ainsi

$$\alpha = 2\lambda.$$

130. EXEMPLE VI. — *Mouche de Saladin.* — La mouche de M. Saladin est elle-même l'inverse du système de Ferguson (*Pl. VIII*, *fig.* 116). La dernière roue est en translation :

$$\alpha' = 0,$$

et la première tourne sur son axe avec la vitesse α,

$$\mathfrak{s} = +\frac{a}{a'}.$$

On a par la formule (1)

$$\lambda = \frac{a}{a' - a}\,\alpha.$$

D'après cela, la vitesse du levier étant assignée, on peut avoir une roue plus rapide ou plus lente, immobile ou de sens contraire; tandis que dans la mouche de Watt la roue est toujours plus rapide que le levier et de même sens.

131. SECOND GENRE. — EXEMPLE VII. — *Pignon valseur.* — Le moteur M agit immédiatement sur la première roue (*Pl. VIII, fig.* 117)

$$\mathfrak{v}_b = 1,$$

la dernière est un guide fixe

$$\mathfrak{v}_b' = 0.$$

On a, d'ailleurs,

$$\mathfrak{v}_b = -\frac{a}{a_1}\frac{a_1}{a'} = -\frac{a}{a'} = -\frac{a}{a + 2a_1}.$$

avec un signe négatif, car si on fixe par la pensée L ou A_1, les roues A et A′ prennent des mouvements opposés. La formule (2) donne dans ces conditions

$$\lambda = \frac{a}{2(a + a_1)}\,\mu.$$

Le rapport de valse $\frac{\alpha_1}{\lambda}$ sera

$$\frac{\alpha_1}{\lambda} = \frac{\alpha_1}{\mu}\cdot\frac{\mu}{\lambda} = \frac{a}{a_1}\cdot 2\left(\frac{a + a_1}{a}\right) = 2\left(1 + \frac{a}{a_1}\right).$$

Si, par exemple, $a = a_1$,

$$\frac{\alpha_1}{\lambda} = 4,$$

le pignon fait quatre tours sur lui-même pour une révolution.

Ce système a reçu de nombreuses applications. Je citerai les automates valseurs des orgues de Barbarie; le mouvement des satellites dans les planétaires les plus simples; la *plume géométrique* de Suardi pour le tracé des épicycloïdes allongées ou raccourcies, très-utiles pour le dessin d'ornementation; enfin la corderie du Grand Hornu pour la confection des câbles de mines, qui sont composés de cordes enroulées en hélice l'une sur l'autre et formées chacune de la même manière de brins tordus en hélice.

132. Exemple VIII. — *Horloge lunaire de Mudge.* — Le mécanisme est symétrique comme disposition générale sinon comme modules (*Pl. VIII, fig.* 118). On a évidemment

$$\mathfrak{B} = +\frac{b_1}{b_2}\frac{b_2}{b_4}, \quad \mathfrak{B}' = +\frac{b'_1}{b'_2}\frac{b'_2}{b'_4},$$

$$\mathfrak{b} = -\frac{a}{a_1}\frac{a_1}{a'} = -\frac{a}{a'} = -1.$$

Et la formule (2) donne

$$\lambda = \frac{1}{2}\left(\frac{b_1}{b_2}\frac{b_2}{b_4} + \frac{b'_1}{b'_2}\frac{b'_2}{b'_4}\right)\mu.$$

Ce système a été appliqué par Mudge en 1767 et par Pecqueur et Perrelet en 1823.

133. Exemple IX. — *Train à potence.* — On trouve facilement (*Pl. VIII, fig.* 119)

$$\mathfrak{B} = +\frac{b_1}{b_2}, \quad \mathfrak{B}' = -\frac{b'_1}{b'_2},$$

avec des signes contraires, car les sens des roues B_2 et B'_2 sont évidemment opposés. On a aussi

$$\mathfrak{b} = +\frac{a}{a_1}\frac{a_2}{a'},$$

et la formule (2) devient

$$\lambda = \frac{\frac{b_1}{b_2}\cdot\frac{a}{a_1}\frac{a_2}{a'} + \frac{b'_1}{b'_2}}{\frac{a}{a_1}\frac{a_2}{a'} - 1}\mu = \frac{aa_2b_1b'_2 + a'a_1b_2b'_1}{b_2b'_2(aa_2 - a'a_1)}\mu.$$

J'indiquerai comme exemple

$$a = 61, \quad a_1 = 49, \quad a_2 = 41, \quad a' = 51,$$
$$b_1 = b'_1 = 100, \quad b_2 = b'_2 = 10,$$
$$\lambda = 25000.\mu.$$

134. EXEMPLE X. — *Train à huit roues d'angles, première forme.* — Si l'on fait attention au système de hachures qui est destiné à mettre en évidence la connexion des différentes pièces dans ce premier type (*Pl. VIII, fig.* 120), on trouve

$$\mathfrak{v}_b = +\frac{b_1}{b_2}, \quad \mathfrak{v}'_b = -\frac{b'_1}{b'_2},$$

avec des signes contraires, car les sens de B_2 et B'_2 sont opposés. En outre,

$$\mathfrak{v}_c = -\frac{a}{a_1}\frac{a_2}{a'},$$

avec le signe négatif; car si on fixe le levier L, les roues A et A′ prennent des sens différents. Dès lors la formule (2) devient

$$\lambda = \frac{-\frac{b_1}{b_2}\cdot\frac{a}{a_1}\frac{a_2}{a'} + \frac{b'_1}{b'_2}}{-\frac{a}{a_1}\frac{a_2}{a'} - 1}\mu = \frac{aa_2b_1b'_2 - a'a_1b_2b'_1}{b_2b'_2(aa_2 + a'a_1)}\mu.$$

J'indiquerai comme exemples :

$$a = 15, \quad a' = 17,$$
$$a_1 = 16, \quad a_2 = 13,$$
$$b_1 = 19, \quad b_2 = 23,$$
$$b'_1 = 61, \quad b'_2 = 103,$$
$$\mu = 1106323.\lambda,$$

et, en second lieu,

$$a = a_2 = b_1 = b'_2 = 83,$$
$$a' = 65, \quad a_1 = 84, \quad b_2 = 106, \quad b'_1 = 82,$$
$$\mu = 1086465_{02} \cdot \lambda,$$

rapports absolument irréalisables avec des trains ordinaires.

135. Troisième genre. — Exemple XI. — *Train à huit roues d'angle, seconde forme.* — Le croquis est identique au précédent, mais les hachures indiquent d'autres connexions (*Pl. VIII*, *fig.* 121) qui nous reportent dans le troisième genre et nous obligent à invoquer l'équation (3). On a d'abord

$$\mathfrak{V} = +\frac{b_1}{b_2}, \quad \Gamma = -\frac{c_1}{c_2},$$
$$\mathfrak{h} = \frac{a}{a_1}\frac{a_2}{a'};$$

ces formules n'ont pas changé, leur notation seule est transformée. Mais il vient, en les reportant dans la relation (3),

$$\alpha' = -\left[\frac{aa_2b_1}{a'a_1b_2} + \left(1 + \frac{aa_2}{a'a_1}\right)\frac{c_1}{c_2}\right]\mu.$$

136. Exemple XII. — *Horloge lunaire de Pecqueur.* — La première roue est un guide fixe (*Pl. VIII*, *fig.* 122)

$$\mathfrak{V} = 0.$$

La connexion du moteur au levier est directe :

$$\Gamma = -\frac{c_1}{c_2}.$$

Enfin nous avons

$$\mathfrak{h} = +\frac{a}{a_1}\frac{a_2}{a'}.$$

Et la formule (3) devient

$$\alpha' = -\frac{c_1}{c_2}\left(1 - \frac{aa_2}{a_1a'}\right)\mu = \frac{(aa_2 - a'a_1)c_1}{a'a_1c_2}\mu.$$

Ce système a été employé par Pecqueur pour réaliser le rapport de la semaine au mois lunaire :

$$-\frac{\alpha'}{\mu}=\frac{44609}{188190},$$

en prenant

$$a=62,\quad a'=41,\quad a_1=85,\quad a_2=33,\quad c=31,\quad c_1=54.$$

Le signe est sans importance comme exprimant seulement que le levier et la dernière roue tournent en sens opposés.

CHAPITRE X.

ENGRENAGES IRRÉGULIERS.

§ I.

VARIATION CONTINUE.

137. Il nous reste à envisager un certain nombre de cas, relativement exceptionnels, où les engrenages sont employés à produire un rapport de vitesses variable. On conserve cependant la forme primitive circulaire, et c'est par un agencement particulier qu'on réalise cette variation. Nous distinguerons, pour plus de clarté, quatre genres différents :

PREMIER GENRE. — *Variation continue.*

SECOND GENRE. — *Variation brusque.*

TROISIÈME GENRE. — *Intermittence.*

QUATRIÈME GENRE. — *Changement de sens.*

138. VARIATION CONTINUE. — *Roues de Rœmer.* — Rœmer, astronome Danois, a employé pour produire le mouvement des planétaires suivant la loi des aires un système de deux roues d'angle (*Pl. VIII, fig.* 123), l'une ordinaire, l'autre portant des dents très-courtes disposées le long d'une courbe quelconque. La transmission s'effectue dès lors d'après un rapport de rayons primitifs qui varie à chaque instant.

Je me proposerai de formuler la théorie générale de cet appareil en cherchant l'équation polaire en r et θ de la

courbe plane, qui, enroulée sur le cône, produira pour le rapport des vitesses angulaires une loi de variation assignée arbitrairement,

$$\frac{\omega}{\omega'} = f(\varphi).$$

Dans cette relation, φ désigne l'angle de rotation de la roue à courbe que nous supposerons irrégulière, tandis que la roue d'angle conserve une marche uniforme ω'.

On a, d'une part,

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{\rho'}{\rho} = \frac{\Delta - \rho}{\rho} = \frac{\Delta - r\sin\alpha}{r\sin\alpha}, \tag{3}$$

et d'autre part, en évaluant de deux manières l'élément de section droite,

$$\rho\, d\varphi = r\, d\theta,$$

$$d\varphi = \frac{r}{\rho}\, d\theta = \frac{d\theta}{\sin\alpha},$$

$$\varphi = \frac{\theta}{\sin\alpha}.$$

Il vient, par conséquent,

$$\frac{\Delta - r\sin\alpha}{r\sin\alpha} = f\left(\frac{\theta}{\sin\alpha}\right),$$

d'où l'on tire l'équation de la courbe cherchée

$$r = \frac{\Delta}{\sin\alpha}\,\frac{1}{1 + f\left(\frac{\theta}{\sin\alpha}\right)}.$$

139. Exemple. — Prenons comme exemple la transmission sinusoïdale

$$\frac{\omega}{\omega'} = a + b\cos n\varphi,$$

la courbe directrice sera

$$r = \frac{\frac{\Delta}{\sin\alpha}}{1 + a + b\cos\left(\frac{n}{\sin\alpha}\theta\right)}.$$

On y reconnaît le profil de galets dérivé des sections coniques (25).

Si on dispose de l'ouverture du cône pour faire

$$n = \sin\alpha,$$

on obtiendra les sections coniques elles-mêmes.

Si les constantes de la loi de mouvement remplissent la condition

$$1 + a + b = 0,$$

on trouvera les galets qui dérivent de la parabole, et pour

$$n = \sin\alpha$$

la parabole elle-même.

Nous avons vu, d'ailleurs (25), qu'en disposant convenablement des coefficients ces profils sont des transformées par développement des sections planes du cône. Dans ce cas, la ligne de Rœmer, que l'on obtient par enroulement du profil trouvé, sera elle-même cette section plane du cône de révolution.

140. La directrice capable de reproduire la loi des aires dans les planétaires rentre précisément dans cet exemple général, comme je vais le faire voir.

On sait, en effet, que cette loi revient à ce que la vitesse angulaire des planètes varie en raison inverse du carré de leur distance au soleil, ou du rayon vecteur d'une ellipse. Comme ce rayon a pour expression

$$\frac{p}{1 - c\cos\varphi},$$

et que d'ailleurs la seconde vitesse angulaire peut être, pour plus de simplicité, supposée constante, on aura

$$\frac{\omega}{\omega'} = k(1 - c\cos\varphi)^2 = k(1 - 2c\cos\varphi),$$

en négligeant le carré de l'excentricité, qui est très-faible pour les planètes et les satellites. On retombe ainsi sur la formule de transmission sinusoïdale.

141. *Rouage d'Huyghens.* — On rencontre dans le planétaire d'Huyghens un système (*Pl. VIII, fig.* 124) formé d'un long pignon à lanterne, engrenant avec une roue d'une forme particulière : c'est une sorte de crémaillère enroulée sur un cylindre, et dont les dents se trouvent disposées comme les fleurons d'une couronne. Cette roue tourne autour d'un point autre que son centre pour produire l'irrégularité.

Comme le pignon fait passer dent pour dent de la crémaillère, les arcs dont il tourne sont égaux à ceux dont le point de contact tourne autour du centre de figure de la roue. Le rapport des vitesses angulaires est donc proportionnel à celui des angles qu'un déplacement infiniment petit du point de contact sous-tend dans la roue, par rapport au centre de figure et au centre de rotation (*Pl. III, fig.* 36). C'est précisément le mode de transmission que nous avons déjà rencontré (48), et l'on voit que le rouage irrégulier d'Huyghens est, au fond, équivalent au renvoi de rotation de Whitworth.

142. *Rouage épicycloïdal excentrique.* — La roue excentrique A mène la roue concentrique B par l'intermédiaire d'une roue épicycloïdale C (*Pl. VIII, fig.* 125). Le contact est constamment maintenu entre A et C, B et C par des liens invariables établis entre les centres de figure, et égaux aux sommes des rayons.

Nous ne nous arrêterons pas ici à donner une théorie détaillée de cet organe, car nous la retrouverons bientôt pour un mécanisme équivalent (156). Il est évident, en effet, que le système actuel revient à celui de deux manivelles (l'excentricité de la roue A et le lien des roues B

et C) reliées par une bielle (la bride qui réunit les roues A et C).

§ II.

VARIATION BRUSQUE.

143. *Roues complémentaires.* — On réalise des variations brusques dans le rapport des vitesses, en changeant brusquement de rayons primitifs (*Pl. VIII, fig.* 126). Mais les roues ainsi formées ne sont pas arbitraires dans toutes leurs parties. Je vais me proposer de déterminer d'une manière générale les conditions qu'elles doivent remplir.

En premier lieu, les deux rayons primitifs correspondants doivent toujours être complémentaires, et reproduire par leur somme la distance des centres, si on suppose pour fixer les idées les engrenages extérieurs

$$r_k + r'_k = \Delta. \tag{1}$$

En second lieu les arcs primitifs correspondants doivent être égaux, puisqu'ils sont destinés à rouler l'un sur l'autre :

$$r_k \theta_k = r'_k \theta'_k. \tag{2}$$

Il est clair d'ailleurs que l'on a, en étendant la somme à tous les angles de chacune des roues,

$$\sum \theta_k = 2\pi, \tag{3}$$

$$\sum \theta'_k = 2\pi. \tag{4}$$

Cette dernière formule se transforme, d'après les équations (1) et (2), de la manière suivante :

$$\sum \theta'_k = \sum \frac{r_k}{r'_k} \theta_k = \sum \frac{r_k}{\Delta - r_k} \theta_k = 2\pi.$$

Si on l'ajoute avec la formule (3), mise sous la forme

$$\sum \frac{\Delta - r_k}{\Delta - r_k}\theta_k = 2\pi,$$

on trouve cette autre plus simple :

$$\sum \frac{\Delta}{\Delta - r_k}\theta_k = 4\pi,$$

c'est-à-dire

$$\sum \frac{\theta_k}{\Delta - r_k} = \frac{4\pi}{\Delta}. \tag{5}$$

On obtient par là, sous la forme (3) et (5), les deux conditions relatives aux éléments d'une quelconque des deux roues, en les isolant de ceux de la roue conjuguée.

144. Si nous nous restreignons en particulier au cas de deux rayons, ces conditions deviendront

$$\theta_1 + \theta_2 = 2\pi,$$

$$\frac{\theta_1}{\Delta - r_1} + \frac{\theta_2}{\Delta - r_2} = \frac{4\pi}{\Delta}.$$

On en tire, par l'élimination,

$$\theta_1 = 2\pi \cdot \frac{(2r_1 - \Delta)(\Delta - r_1)}{\Delta(r_2 - r_1)},$$

$$\theta_2 = 2\pi \cdot \frac{(2r_1 - \Delta)(\Delta - r_2)}{\Delta(r_1 - r_2)}.$$

On voit qu'aucun des rayons ne peut être égal à la moitié de la ligne des centres, c'est-à-dire qu'on ne peut pas réaliser dans cet appareil un intervalle d'égalité de vitesse; car les dénominateurs s'annuleraient en même temps que les numérateurs, et les angles ne seraient plus déterminés. Et, en effet, si les rayons étaient égaux, ainsi que leurs arcs, il en serait de même de leurs angles. Il resterait donc des angles égaux pour des rayons différents, ce qui est impossible; ou pour des rayons égaux, mais alors ils forme-

raient encore la moitié de la ligne des centres, et il n'y aurait plus variation de vitesse.

Aucun des rayons ne peut donc être celui du cercle moyen. Nous allons reconnaître qu'il est nécessaire et suffisant que dans chaque paire ils soient l'un supérieur et l'autre inférieur à ce dernier. Supposons, en effet,

$$r_1 < r_2,$$

comme les dénominateurs sont de signes contraires, il en doit être de même des numérateurs. Leurs seconds facteurs sont essentiellement positifs, et, quant aux premiers, celui de θ_1 est le plus grand. On doit donc avoir

$$2r_1 - \Delta < 0, \qquad 2r_2 - \Delta > 0,$$

d'où

$$r_1 < \frac{\Delta}{2} < r_2.$$

Ainsi la condition est nécessaire. Elle est de plus suffisante, car la seconde restriction est que chacun des angles soit inférieur à 2π, ou que l'on ait pour le premier, par exemple,

$$(2r_2 - \Delta)(\Delta - r_1) < \Delta(r_2 - r_1).$$

Or, on reconnaîtra facilement que cette inégalité revient à la suivante :

$$(\Delta - r_2)(2r_1 - \Delta) < 0,$$

laquelle est satisfaite en raison des précédentes.

145. Considérons enfin le système binaire le plus simple de tous, c'est-à-dire celui dont les deux roues sont pareilles (*Pl. VIII, fig.* 127). Ce ne peut être par les arcs semblables qu'elles se conduisent, car les rayons simultanés doivent être complémentaires ; c'est donc par les arcs dissemblables. Mais ils sont isopérimètres d'une roue à l'autre, et, comme toutes les deux doivent être identiques,

ils seront isopérimètres sur une même roue. La condition nécessaire et suffisante est donc que sur chacune d'elles les rayons soient complémentaires à la ligne des centres, que les angles le soient à 360 degrés, et qu'ils soient en raison inverse les uns des autres.

La *fig.* 127, *Pl. VIII*, représente un de ces systèmes pour lequel on a pris

$$r_1 = \frac{1}{4}\Delta, \quad r_2 = \frac{3}{4}\Delta,$$
$$\theta_1 = \frac{3}{2}\pi, \quad \theta_2 = \frac{1}{2}\pi.$$

§ III.

INTERMITTENCE.

146. *Roues partielles.* — On réalise les alternatives de mouvement et de repos en employant comme roues menantes des circonférences partiellement dentées qui engrènent dans les intervalles garnis de dents et cessent de transmettre le mouvement dans les autres, la résistance à vaincre suffisant alors à arrêter la roue menée (*Pl. VIII*, *fig.* 128).

Cependant, comme en raison de l'inertie cet arrêt ne peut être instantané, la roue menée éprouvera un faible déplacement par rapport à la position où elle a été abandonnée par la roue menante ; et, quand la nouvelle denture se présentera, cette roue ne sera pas disposée pour l'engrènement. Aussi a-t-on soin de munir l'origine des arcs dentés de la roue menante de becs qui viennent saisir un bouton placé sur la roue menée, et disposent ainsi avec précision cette dernière à recevoir la première dent de la roue menante.

D'après cela les boutons divisent la roue menée en un certain nombre d'arcs qui se succèdent sans interruption,

et qui doivent être respectivement égaux à ceux de la roue menante. Si donc les deux roues ont le même nombre d'arcs, ceux-ci seront respectivement égaux. Si le nombre de la roue menée est un multiple de l'autre, ses arcs doivent être périodiquement égaux à ceux de la roue menante. Si les deux nombres sont premiers entre eux, tous les arcs doivent être égaux, car chacun d'eux engrènera successivement avec tous les autres. S'ils ont seulement un facteur commun, les arcs se reproduiront périodiquement d'après ce facteur commun.

Il n'existe, du reste, aucune restriction pour les arcs vides de la roue menante. Par suite, le rapport des vitesses pourra être un nombre quelconque, fût-il incommensurable, ce qui est impossible dans les rouages ordinaires (109).

147. *Compteurs.* — On emploie pour les compteurs décimaux un cas particulier de la disposition précédente dans lequel la roue menée présente dix dents et la roue menante une seule, de sorte que les nombres de tours sont décuples l'un de l'autre. Nous reviendrons plus tard (297) sur l'emploi de ce rouage.

148. *Arithmaurel.* — Dans la machine à calculer de MM. Maurel et Jayet, l'organe essentiel est un long pignon (*Pl. VIII, fig.* 129) formé par la superposition de neuf roues qui présentent successivement 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9 dents. On le fait engrener avec une roue susceptible de se transporter parallèlement à elle-même suivant son axe de rotation. D'après cela, si la roue est amenée par un tirage longitudinal en regard du pignon m, et qu'on fasse faire n tours à ce pignon, on fera passer mn dents de la roue. C'est le principe de la multiplication.

§ IV.

CHANGEMENT DE SENS.

149. *Roue alternative.* — La roue menante est formée d'une jante dentée à l'intérieur et d'un moyeu denté à l'extérieur (*Pl. IX, fig.* 131). Ces deux dentures sont d'ailleurs partielles, et leurs extrémités se correspondent sur les mêmes rayons.

D'après cela, pendant la marche continue de la roue, le pignon interposé jouera, par rapport à elle, le rôle d'un engrenage alternativement extérieur ou intérieur, et par suite il se mouvra successivement dans les deux sens.

Lanterne oscillante. — La roue menante est un pignon à alluchons (*Pl. IX, fig.* 132) installé au bout d'un arbre. Celui-ci est pris dans un palier, qui est mobile dans une faible étendue, de manière à permettre à l'axe de jouer d'un certain angle. D'un autre côté, la roue à lanterne est interrompue en un point, et le fuseau qui devrait s'y trouver est remplacé par un arrêt infranchissable.

Lorsque cette roue sous l'effort du pignon vient lui présenter cet arrêt, la continuation du mouvement dans ce sens devient impossible sans briser la machine, si le pignon, sous l'empire de l'effort développé, ne tourne autour du dernier fuseau, pour passer de l'intérieur de la lanterne à l'extérieur ou réciproquement. On obtient donc encore un engrenage alternativement extérieur ou intérieur, c'est-à-dire un changement de sens.

Double pignon oscillant. — Si on enroule sur une moitié de cylindre une crémaillère menante, comme dans le mécanisme d'Huyghens (141), elle déterminera évidemment des rotations inverses du pignon dans chacun de ses passages (*Pl. VIII, fig.* 130).

Si la denture occupe moins que la demi-circonférence, le rouage sera en outre intermittent. Elle ne saurait, du reste, occuper plus de la demi-circonférence.

150. *Crémaillère double.* — Le pignon menant (*Pl. IX, fig.* 133) n'est denté que sur une portion de son contour, qui agit successivement dans deux sens opposés sur les parois de la crémaillère.

Crémaillère à pignon oscillant. — Le pignon est denté sur toute sa circonférence (*Pl. IX, fig.* 134), mais il a la latitude de passer d'un côté à l'autre de la cloison lorsque le fond du cadre vient buter contre lui. Il agit donc encore sur la crémaillère dans deux sens différents.

CHAPITRE XI.

BIELLES.

§ I.

THÉORÈMES FONDAMENTAUX.

151. Généralités. — Nous comprenons sous la dénomination de *bielles* les organes dont les deux pièces principales sont mises en relation par un intermédiaire solide (XXV).

La bielle est, à proprement parler, cet intermédiaire. On la munit toujours à ses extrémités d'articulations (41) qui la réunissent aux deux autres pièces. Pour étudier son mouvement, nous pouvons la réduire à la ligne droite qui joint les centres de ces articulations. Ce mouvement sera alors celui d'une droite de longueur constante qui s'appuie par ses extrémités sur deux courbes déterminées.

Ces lignes sont ordinairement planes et situées dans le même plan. La bielle s'y trouvera par cela même. Elle prendra donc un mouvement plan et aura un centre instantané. Celui-ci est le point de concours des normales (VIII) de toutes les trajectoires, et comme nous connaissons deux de ces courbes, nous obtiendrons ce centre par l'intersection des normales aux deux courbes proposées (*Pl. III, fig.* 37) (1).

(1) Pour plus de généralité, imaginons que le système de deux courbes quelconques liées ensemble soit guidé par deux autres courbes fixes. Le centre instantané se trouvera encore à l'intersection des normales communes

Si l'on veut connaître, pour chaque position de la bielle, le point où elle touche son enveloppe, il suffira d'y projeter le centre instantané (VIII).

Nous savons encore (VIII) comment ce centre fournit pour chaque point la direction et la valeur de sa vitesse. Cherchons, par exemple, le rapport des vitesses de glissement des deux extrémités. Nous aurons pour cela

$$\frac{v}{v'} = \frac{\Omega A}{\Omega A'} = \frac{\sin \Omega A'A}{\sin \Omega AA'} = \frac{\cos AA'T'}{\cos A'AT},$$

ce qu'on peut écrire

$$v \cos (v, AA') = v' \cos (v', AA').$$

Les vitesses estimées suivant la bielle sont donc les mêmes pour ses deux extrémités ; et par suite pour un point quelconque de cette bielle, car on peut l'arrêter par la pensée en tel endroit que l'on voudra.

152. RAPPORT DE TRANSMISSION. — Supposons, en particulier, que les deux courbes soient des cercles, pour rentrer dans le cas de la pratique. Les normales sont alors les rayons, et le centre instantané de la bielle se trouve incessamment à l'intersection des deux rayons d'attache (*Pl. III, fig.* 38).

---

aux deux points de contact. On pourra donc de même connaître la direction d'un point quelconque lié aux courbes mobiles ou le point de contact d'une troisième ligne arbitraire tracée dans leur plan avec son enveloppe (VIII).

Le problème des bielles se présente comme cas particulier si l'on réduit par la pensée les courbes mobiles à une seule ellipse infiniment aplatie.

On remarquera encore le cas particulier où ces lignes seraient les côtés d'un angle invariable et où les deux guides fixes se réduiraient à une seule courbe. On saura par là mener la tangente au lieu géométrique des points d'où une courbe fixe est vue sous un angle constant. Il est facile de reconnaître que ce lieu est tangent au cercle mené par le sommet de l'angle et les deux points de contact.

L'équation générale peut alors se mettre sous la forme

$$\frac{\omega r}{\omega' r'} = \frac{\sin \Omega A'A}{\sin \Omega AA'},$$

d'où en projetant les deux centres sur la bielle en P, P',

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{r' \sin C'A'P'}{r \sin CAP} = \frac{C'P'}{CP}.$$

Les vitesses angulaires sont donc en raison inverse des distances des centres à la bielle.

Si nous menons C'H parallèle à CA, nous pourrons encore écrire

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{C'H}{CA},$$

et comme CA est une constante, on voit que le rapport de la première à la seconde vitesse angulaire varie comme la distance du second centre à la bielle, comptée parallèlement au premier rayon d'attache.

Nous aurons enfin, en traçant la ligne des centres CC'K,

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{C'K}{CK},$$

et par conséquent ce troisième énoncé : Le rapport des vitesses angulaires est le rapport inverse des segments interceptés par la bielle sur la ligne des centres.

153. Quant au sens des vitesses, on peut poser la règle suivante : Si la bielle rencontre la ligne des centres sur son prolongement, les deux rotations sont de même sens; si elle la coupe dans l'intervalle des centres, elles sont de sens contraire.

En effet, vues du centre instantané Ω, les deux rotations sont, bien entendu, de même sens, puisqu'elles n'en forment qu'une seule. Or, Ω sera déterminé par l'intersection des bras prolongés tous deux du côté des articulations

ou tous deux en arrière, si les deux centres sont d'un même côté de la bielle; alors les observateurs C et C′ voient tous les deux les rotations comme l'observateur Ω, ou d'une manière contraire à la sienne, c'est-à-dire dans un même sens. Si au contraire les centres se trouvent de part et d'autre de la bielle, on obtient Ω en prolongeant l'un des bras du côté de l'articulation et l'autre en arrière. L'un des observateurs C ou C′ est donc tourné comme Ω, tandis que l'autre lui fait face, et par conséquent leurs impressions seront inverses.

154. Si l'un des cercles se réduit à une droite, le centre instantané Ω se trouve à l'intersection du rayon d'attache et de la perpendiculaire à la droite (*Pl. III, fig.* 39).

L'équation générale devient dans ce cas

$$\frac{v}{\omega r} = \frac{\sin \Omega AA'}{\sin \Omega A'A} = \frac{CH}{CA},$$

d'où

$$\frac{v}{\omega} = CH.$$

Le rapport des vitesses linéaire et angulaire est représenté par la distance du centre à la droite, comptée perpendiculairement à la droite.

155. Si les deux cercles se réduisent à des droites rectangulaires (*Pl. III, fig.* 40), le centre instantané se trouve au quatrième sommet du rectangle dont la bielle forme la diagonale; et le rapport des vitesses des extrémités est le rapport inverse de leurs distances au point de croisement des deux droites.

Dans ce cas, le plus simple de tous, et fréquemment réalisé dans la pratique, on peut donner une image élégante du mouvement continu. Nous savons (IX) que c'est le roulement des deux lieux du centre instantané dans l'espace

absolu et dans la figure mobile. Le premier est un cercle qui a pour rayon la bielle et pour centre le point de croisement; car le centre instantané est le quatrième sommet du rectangle, les deux diagonales sont égales, et par suite la distance du sommet au point de croisement reste constante. Le second est un cercle qui a la bielle pour diamètre, car le centre instantané occupe constamment le sommet d'un angle droit inscrit sur cette bielle. Donc le mouvement continu revient au roulement d'un cercle dans un autre de rayon double.

Il est facile, en outre, d'établir les deux propositions suivantes, dont je supprime la démonstration : La trajectoire de tout point de la bielle ou de son plan est une ellipse qui a pour axes les droites rectangulaires. Elle se réduit à un cercle pour le centre de la circonférence mobile et à un diamètre du cercle fixe ou flanc (81) pour les points de cette circonférence mobile. En outre, l'enveloppe de la bielle est l'épicycloïde décrite par le roulement d'un cercle dans un autre de rayon quadruple.

156. Combinaisons de mouvement. — Les cas que nous venons de considérer sont les seuls qui intéressent la pratique pour une raison facile à comprendre. En effet, le mouvement d'une bielle étant toujours extrêmement compliqué, les efforts qu'elle transmet seront très-variables en grandeur et en direction. Il est donc nécessaire de soigner particulièrement les guides des pièces conduites, et pour cela de ne leur attribuer que des mouvements simples, tels que la rotation ou le mouvement rectiligne, ce qui fournit les trois combinaisons précédentes.

Il y a lieu cependant de pousser plus loin la subdivision. Le mouvement rectiligne ne peut être, en effet, employé que d'une manière alternative; mais le mouvement de rotation peut être progressif ou de va-et-vient. De là trois

sortes de pièces, que nous désignerons par les noms suivants : les *tiges* seront les pièces en mouvement rectiligne alternatif, les *manivelles* celles qui possèdent une rotation continue, et les *balanciers* une rotation alternative.

On peut, du reste, grouper ces éléments de six manières différentes, qui donneront lieu à trois combinaisons similaires et trois dissemblables.

PREMIÈRE CATÉGORIE. — *Deux tiges.*

SECONDE CATÉGORIE. — *Deux manivelles.*

TROISIÈME CATÉGORIE. — *Deux balanciers.*

QUATRIÈME CATÉGORIE. — *Tige et manivelle.*

CINQUIÈME CATÉGORIE. — *Manivelle et balancier.*

SIXIÈME CATÉGORIE. — *Balancier et tige.*

157. L'établissement de ces différents types nécessite certaines conditions qu'il est intéressant de préciser. Nous supposerons toujours, comme c'est le cas de la pratique, les trois pièces comprises dans un même plan.

La première catégorie, ou la connexion de deux tiges, n'exige aucune restriction.

Pour la quatrième et la sixième, qui réunissent une tige et une pièce tournante, il est d'abord nécessaire que la longueur de la bielle soit supérieure à la moindre distance du cercle à la tige, c'est-à-dire à la distance du centre diminuée du rayon. On obtiendra d'ailleurs le mouvement circulaire continu ou alternatif, c'est-à-dire la quatrième ou la sixième catégorie, suivant que la longueur de la bielle sera supérieure ou inférieure à la plus grande distance du cercle à la tige, c'est-à-dire à la distance du centre augmentée du rayon. Il sera, en effet, alors possible ou non à l'articulation de la bielle de passer par le point du cercle le plus éloigné de la tige.

158. Considérons maintenant la seconde, la troisième et

la cinquième catégorie, c'est-à-dire la connexion de deux pièces tournantes (1). Nous appellerons *pôles* les intersections de la ligne des centres avec chacun des cercles, et *segments* les distances d'un pôle pris sur l'un des cercles à chacun des pôles de l'autre. Parmi ces quatre segments nous en distinguerons encore deux *moyens* et deux *extrêmes*. Ces derniers, à savoir le plus petit et le plus grand des quatre, mesurent la moindre et la plus grande distance commune des deux cercles.

Une première condition commune aux trois catégories, et évidente par elle-même, est que la longueur de la bielle soit comprise entre les segments extrêmes. Il serait, en effet, sans cela impossible que l'une des articulations étant placée sur un cercle, l'autre extrémité pût se trouver sur le second.

La condition du mouvement continu ou alternatif sur l'un des cercles est ensuite que l'articulation qui s'y meut puisse ou non franchir ses deux pôles. Il faut à cet égard, pour chaque pôle, que la bielle soit ou non comprise entre les deux segments qui y aboutissent. Cela revient à ce que sa longueur soit ou non comprise entre les deux segments moyens. En effet, les deux segments de l'un des pôles seront : ou les deux moyens, ce qui démontre la proposition; ou les deux extrêmes, auquel cas l'autre pôle fournit les deux moyens; ou enfin un moyen et un extrême. Dans ce cas, la bielle doit être inférieure au segment moyen adjacent au minimum et supérieure au segment moyen adjacent au maximum, puisque, d'après ce qui précède, elle est toujours comprise entre le segment minimum et le maximum.

D'après cela, pour la troisième catégorie, qui présente

(1) Cette discussion a été, à la forme près que nous lui donnons ici, présentée pour la première fois par M. Girault, professeur à la Faculté de Caen. On en facilitera l'intelligence en dessinant au fur et à mesure les différentes dispositions indiquées.

deux rotations alternatives, la condition sera que la bielle, tout en restant comprise entre les segments extrêmes, ne le soit pas entre les segments moyens.

159. Portons maintenant notre attention sur la seconde catégorie, qui réunit deux rotations continues. Il devient nécessaire de supposer, au contraire, la bielle comprise entre les segments moyens. Mais la disposition des cercles ne peut plus être laissée quelconque. Pour la préciser plus clairement, appelons C et c les centres du plus grand et du plus petit cercle. Plaçons la ligne Cc horizontalement, C à droite et c à gauche. Appelons A, B; a, b le pôle droit et le pôle gauche du grand et du petit cercle.

Le pôle A, étant le plus à droite des quatre, présente parmi ses deux segments le maximum Ab; l'autre Aa est donc le moindre des deux, et comme ils doivent, pour le passage en A, comprendre la longueur l de la bielle,

$$l > Aa.$$

Au passage en B, l doit être de même inférieur au plus grand des deux segments adjacents Ba, Bb. Ce sera évidemment celui qui contient le milieu c de la distance ab. Or, si nous supposons d'abord c extérieur à la grande circonférence, c'est-à-dire situé à gauche de B, il se trouvera du même côté que b, et par suite sur Bb. On aura donc

$$c \text{ extérieur} \ldots\ldots \quad l < Bb;$$

et on trouverait de même

$$c \text{ intérieur} \ldots\ldots \quad l < Ba.$$

En rapprochant ces inégalités de la précédente, nous en déduisons

$$c \text{ extérieur} \ldots\ldots \quad Bb > Aa,$$
$$c \text{ intérieur} \ldots\ldots \quad Ba > Aa.$$

La première est impossible. En effet, Aa est formé de la somme ou de la différence (suivant que les cercles sont

extérieurs ou sécants) du grand diamètre AB et du segment minimum Ba; et Bb est composé de même avec le petit diamètre ab et Ba. Le premier est donc supérieur au second. Aussi, il devient nécessaire de supposer que c soit intérieur à la grande circonférence ; mais alors la dernière inégalité exige que a soit plus rapproché de A que de B, ou se trouve à droite du milieu C de leur distance. Ce centre se trouve donc lui-même intérieur à la petite circonférence, et par suite chacun des deux cercles doit renfermer le centre de l'autre.

160. Il reste enfin à considérer la cinquième catégorie, qui comprend une rotation continue et une alternative. Ce cas se présentant nécessairement lorsque aucun des deux précédents ne sera réalisé, la condition est que la bielle restant comprise entre les segments moyens, le centre de la grande circonférence soit extérieur à la petite.

Nous pouvons, par conséquent, résumer de la manière suivante ce qui est relatif aux trois derniers cas, renfermant toutes les combinaisons de deux pièces tournantes : 1° deux balanciers, lorsque la bielle est comprise entre les segments extrêmes, mais non entre les segments moyens, quelle que soit d'ailleurs la disposition des centres ; 2° deux manivelles, lorsque la bielle est comprise entre les segments moyens et que le centre de la grande circonférence est intérieur à la petite ; 3° manivelle et balancier, lorsque la bielle est comprise entre les segments moyens et que le centre de la grande circonférence est extérieur à la petite.

161. Mentionnons enfin les hypothèses limites relatives à l'égalité des rayons, ou à l'égalité de la bielle et d'un des segments, ou enfin à la position des cercles, comme le cas de tangence, ou de la position du centre de chaque cercle sur l'autre ou des deux en un même point. On peut par là donner lieu à un très-grand nombre de cas particuliers, qu'il

serait trop long d'énumérer en détail. Il est seulement nécessaire d'être bien prévenu sur ce point, qui peut donner lieu à des exceptions pour nos règles générales.

162. POINTS MORTS. — Lorsqu'on voudra, dans un mouvement alternatif qui s'effectue sur un cercle C, trouver les points extrêmes, il faudra chercher le maximum d'éloignement ou de rapprochement que son articulation peut subir par rapport à l'autre centre *c*. Mais le rayon et la bielle forment dans l'espace un triangle que ferme cette distance, et par suite celle-ci sera intermédiaire entre leur somme ou leur différence. Les limites de la distance seront donc cette somme et cette différence elles-mêmes, et il suffira, pour trouver les positions extrêmes sur le cercle C, de prendre ces longueurs pour rayons de deux cercles de construction décrits de *c* comme centre. Il est bien clair d'ailleurs, en raison de la symétrie, qu'on trouvera toujours double intersection de chaque côté de la ligne des centres.

Pour les positions ainsi obtenues, le triangle en question s'aplatit, de sorte que la bielle et le bras se trouvent sur la même ligne droite, en prolongement ou en recouvrement l'un de l'autre. Si donc la pièce C est menante et *c* conduite, il sera impossible de déterminer la mise en marche de l'appareil à partir de ces points. On les appelle pour cette raison *points morts,* et on se rappellera que les points morts de l'un des corps tournants correspondent aux points limites de l'autre.

L'existence des points morts constitue, pour la transmission de mouvement à l'aide des bielles, un grave inconvénient. Nous indiquerons plus tard les moyens que l'on emploie pour lever cette difficulté. Constatons seulement ici que la combinaison de deux manivelles ne présentera pas ce défaut, ou que la bielle n'y passera jamais par aucun des deux centres. En effet, chacun des deux mouvements

est alors continu ; il n'a donc pas de points limites, et par conséquent l'autre ne peut avoir de points morts. Nous savons d'ailleurs (153) que les deux rotations étant toujours alors de même sens, la bielle laisse nécessairement les centres d'un même côté.

§ II.

ORGANES SIMPLES.

163. Bielles. — Avant de passer à l'étude des combinaisons de mouvement, il est nécessaire de décrire sommairement les pièces qui y jouent un rôle (156).

La plus répandue dans les machines est appelée proprement la *bielle* (*Pl. IX, fig.* 135). C'est une barre munie à ses extrémités de deux têtes de bielle (40), renflée dans l'intervalle et munie de nervures pour garantir sa solidité (445).

Lorsque l'articulation de l'une des extrémités prend un développement exagéré qui en fait un excentrique circulaire à collier (41), la forme du corps change et devient celle de la *bielle d'excentrique* (*Pl. V, fig.* 85). On l'allége à cause de son développement, et parce que, comme nous le verrons dans la théorie du frottement (364), cette combinaison n'est employée que pour de faibles efforts.

Lorsque le plan de l'oscillation renferme quelque pièce, comme une tige de piston, qui empiète sur l'espace parcouru par la bielle, on emploie la *bielle fendue* (*Pl. IX, fig.* 136), c'est-à-dire un cadre dont le plan est perpendiculaire à celui du mouvement.

On rencontre même, dans la presse hydraulique, une *bielle doublement fendue* (*Pl. IX, fig.* 137). Le premier cadre est fendu pour liver passage au second, et celui-ci pour laisser passer le levier, qui est représenté par un

tronçon en perspective. Il n'était pas possible, en effet, de l'articuler directement au premier cadre, car tous les points de celui-ci sont en translation et le levier tourne autour d'un certain axe.

Pour renvoyer le mouvement dans le sens horizontal à de grandes distances, comme dans les galeries de mines, on emploie les *barres de renvoi* (*Pl. IX, fig.* 138), réunies par des pièces transversales qui oscillent autour de points d'appui. L'appareil est double, comme on le voit, pour que dans les deux sens la transmission puisse avoir lieu par traction, sans qu'on ait recours à une compression qui ferait fouetter les pièces. Dans le sens vertical, comme dans les puits de mine, on emploie les *maîtresses tiges,* qui sont simplement des barres de charpente assemblées en prolongement l'une de l'autre, et dont la section croît à partir du bas (434), car les parties supérieures ont à supporter, outre le poids des pompes placées à la partie inférieure, celui des tiges elles-mêmes.

164. *Tiges.* — Les *tiges* sont des organes tellement simples, qu'il serait superflu de nous y arrêter.

Mentionnons cependant la *tige Gorgone,* d'un diamètre assez considérable pour permettre le jeu à son intérieur d'une bielle, qui est alors directement attachée sur le piston situé à l'extrémité. On évite par là le développement du système en longueur, propriété précieuse dans les navires à vapeur.

165. *Manivelles.* — On distingue dans la *manivelle* (*Pl. IX, fig.* 139) son *centre,* son *rayon* et son *bouton.* Ce dernier décrit un cercle dont le diamètre est appelé la *course* ou l'*excursion.* Elle est le double du *bras.*

Lorsqu'on a besoin de faire exécuter des courses différentes à la bielle, on emploie une *manivelle à rayon variable* (*Pl. IX, fig.* 140). A cet effet, le bouton est porté

sur un curseur, qui se fixe à volonté sur le bras au moyen d'un boulon.

La manivelle ne peut s'installer qu'à un bout d'arbre. En un point intermédiaire, il y aurait enchevêtrement lorsque la bielle se présenterait au point mort pour passer d'un côté à l'autre de l'arbre. Imaginons, pour ce cas, deux bouts d'arbre avec des manivelles réunies par leurs boutons; nous obtiendrons la disposition de l'*arbre coudé* (*Pl. IX, fig.* 141). Quand on a deux coudes à établir, comme dans les locomotives, on dispose leurs plans à angle droit. Si on en a trois, comme dans les bateaux à vapeur, on les met à 120 degrés. C'est afin de croiser les points morts, de sorte que si une bielle se trouve hors d'état de démarrer le système, les autres soient capables de le faire. Nous reviendrons avec détail sur cette disposition (263).

Les coudes sont toujours une condition fâcheuse de solidité. On peut leur substituer l'emploi de l'*excentrique circulaire à collier* (*Pl. V, fig.* 85) qui ne présente plus le même inconvénient que la manivelle simple. En effet, chacun des montants de la bielle oscille alors d'un seul côté de l'arbre sans avoir besoin de le traverser. Ce mécanisme est donc équivalent à une manivelle qui aurait pour bras l'excentricité et une bielle linéaire disposée suivant la bissectrice de la bielle d'excentrique. Nous verrons, en parlant du frottement (364), dans quels cas on doit préférer le coude ou l'excentrique.

166. *Balanciers.* — La forme la plus simple est la ligne droite. Elle fournit les *leviers* oscillants, les *fléaux* des balances, les *balanciers* des grandes machines. On donne à ceux-ci un profil parabolique renflé vers le milieu pour la solidité (*Pl. IX, fig.* 142). Le calcul l'indique, en effet, pour la meilleure répartition de la matière (456).

Un autre type très-employé est formé des deux côtés d'un angle. Il fournit les *leviers coudés*, les *renvois* de sonnette, les *varlets* (*Pl. IX, fig.* 143) qui servent à rattacher les maîtresses tiges aux barres de renvoi (159).

§ III.

TRANSMISSIONS.

167. Deux tiges. — *Parallélogramme d'Evans.* — Le système d'Évans, appelé assez improprement *parallélogramme* (*Pl. IX, fig.* 144), réalise le mouvement de deux tiges rectangulaires reliées par une bielle (155).

Pour éviter les tractions latérales, qui fatigueraient rapidement les guides, on réunit le milieu de la bielle au point de croisement par une bride égale à la moitié de la bielle. On se fonde, pour cela, sur cette propriété évidente des triangles rectangles qui ont même hypoténuse, que la distance du milieu de celle-ci au sommet de l'angle droit reste constante et égale à la moitié de cette hypoténuse.

168. *Losange articulé.* — On réalise encore la même transmission dans le losange articulé (*Pl. IX, fig.* 145). Les tractions latérales sont alors supprimées par la symétrie même de l'appareil.

169. *Compas de menuisier.* — Cet instrument sert à tracer les ellipses d'après la propriété (155) du mouvement d'une droite de longueur invariable prise entre les côtés d'un angle droit (*Pl. IX, fig.* 146).

Il se compose d'une planchette qui présente deux rainures rectangulaires. On y fait glisser deux boutons reliés par une tige sur laquelle se trouve la pointe traçante. Les demi-axes de l'ellipse ainsi obtenue sont les distances de la

pointe aux deux boutons. Pour pouvoir les faire varier à volonté, on monte ces derniers sur des curseurs mobiles le long de la règle, à laquelle on les assujettit par des vis de serrage.

170. Deux manivelles. — *Roues couplées.* — Dans les locomotives de marchandises on réunit les différents trains de roues par des bielles d'accouplement (*Pl. IX, fig.* 147), afin d'utiliser pour l'adhérence tout le poids du véhicule (384). On a soin alors de placer à angle droit les rayons des boutons d'accouplement pour croiser les points morts.

Un défaut important de ce mécanisme, très-simple d'ailleurs, est de déterminer la plupart du temps un glissement. Il est presque impossible, en effet, d'avoir deux circonférences rigoureusement égales, et dès lors elles ne sauraient s'appliquer un même nombre de fois par roulement simple sur une longueur donnée.

171. *Roues à aubes parallèles.* — Dans les roues hydrauliques ordinaires à palettes, celles-ci sont disposées suivant les rayons, et tendent par suite à soulever l'eau en émergeant. Pour éviter ce défaut, il conviendrait que les palettes restassent parallèles à elles-mêmes. Ce but a été réalisé par un ingénieur Suédois, au moyen d'une disposition, à la vérité plus curieuse que pratique (*Pl. X, fig.* 148). Il suffit, pour donner une idée de ce mécanisme, de supposer un cercle que l'on abaisse par une translation, et dont les différentes trajectoires deviennent les palettes de la roue. Si on réalise par un joint d'Oldham (189) une rotation identique de ces deux cercles, les aubes resteront constamment verticales.

172. Deux balanciers. — On simplifie ordinairement ce dispositif en employant des balanciers égaux, et donnant pour longueur à la bielle celle de la ligne des centres. Les

balanciers peuvent alors se trouver ou non du même côté de la bielle, et dans le premier cas être ou non croisés. De là trois combinaisons qui se trouvent réalisées dans les mécanismes suivants.

173. *Parallélogramme de Roberval.* — Dans la balance à plateaux supérieurs de Roberval (*Pl. X, fig.* 149), le problème consiste à assurer une direction constante au plateau ou à la tige qui le supporte, et qui sert de lien entre deux fléaux. Cette condition se trouve évidemment remplie, car le quadrilatère AA′CC′ a ses côtés invariables, et par suite ils ne cessent pas d'être égaux deux à deux, ce qui assure la forme du parallélogramme. Le mouvement de la tige sera donc une translation circulaire qu'il ne faut pas confondre avec une rotation.

174. *Pendule de White et parallélogramme de Reulaux.* — Les deux autres combinaisons ont été réalisées par White et Reulaux (de Zurich). Le premier croise les balanciers (*Pl. X, fig.* 150), le second les dispose de chaque côté de la bielle (*Pl. X, fig.* 151). Il faut alors munir les parties postérieures d'encoches pour assurer le sens du mouvement aux environs des points morts (¹).

On peut s'assurer par les *fig.* 150 et 151 que dans ces deux appareils le mouvement continu revient au roulement des ellipses que nous avons étudié antérieurement (20). On retrouve, en effet, à chaque instant, dans la figure des ellipses roulantes (*Pl. I, fig.* 8), les éléments de l'une ou l'autre de ces deux combinaisons. C'est un exemple remarquable de la représentation du mouvement continu d'un corps par le roulement des deux lieux du

(¹) Le système de Reulaux est installé de manière à permettre deux rotations continues, et prend alors le nom de *manivelles antirotatives*. C'est un des cas particuliers dont nous avons parlé en terminant le § 161.

centre instantané (IX). Nous constatons, en effet, que ce centre, déterminé, comme nous le savons (152), par l'intersection des rayons d'attache, se trouve à chaque instant au point de contact des deux ellipses.

175. TIGE ET MANIVELLE. — *Machine à connexion directe.* — Le mouvement est transmis de la tige de piston à la manivelle par l'intermédiaire de la bielle (*Pl. X, fig.* 152).

176. *Boîte à étoupes oscillante.* — On a essayé de supprimer la bielle en articulant directement la tige du piston sur la manivelle (*Pl. X, fig.* 153), mais il devient nécessaire pour cela de faire varier le point de sortie sur le fond du cylindre. Aussi la boîte à étoupes se meut-elle dans une rainure. En outre, elle oscille dans un châssis de manière à laisser varier l'angle que fait la tige avec le fond. Ce système compense donc une légère simplification par une complication bien autrement fâcheuse. Au point de vue géométrique, on n'a d'ailleurs rien changé à la transmission précédente. Le corps du piston joue le rôle de tige rectiligne, et sa tige celui de bielle reliant ce piston à la manivelle.

177. *Balancier de Cartwright.* — La tige est réunie aux manivelles par deux brides (*Pl. X, fig.* 154). Les roues dentées servent seulement de guides pour la simultanéité des deux manivelles. L'appareil est double, afin d'éviter par la symétrie les poussées latérales.

178. MANIVELLE ET BALANCIER. — *Pédale du rémouleur.* — Le mouvement est transmis de la pédale manœuvrée par le pied du rémouleur à la manivelle de la meule par une corde qui joue le rôle de bielle et qui n'agit que de haut en bas (*Pl. X, fig.* 155).

179. *Machine à vapeur de Watt.* — C'est la même

combinaison avec une bielle solide qui agit dans les deux sens (*Pl. X, fig.* 156). L'usage est de placer dans la position moyenne le balancier et la manivelle parallèlement l'un à l'autre, et la bielle dans une direction perpendiculaire. Dans ces conditions, une oscillation double du balancier correspond à une révolution complète de la manivelle.

180. M. Girard a proposé une disposition différente et assez curieuse dans laquelle l'oscillation simple du balancier produit la révolution complète de la manivelle (*Pl. III, fig.* 13). Dans la position moyenne, les trois pièces sont disposées suivant la ligne des centres OO', la bielle AA' en prolongement du balancier OA et en recouvrement de la manivelle O'A'. Pour avoir les positions extrêmes, nous savons (158) qu'il suffit de couper le cercle O que décrit l'extrémité du balancier par un cercle O' concentrique à la manivelle et d'un rayon égal à la somme des longueurs du bras et de la bielle. En raison de la symétrie, on obtiendra ainsi deux situations extrêmes A_1, A_2 pour l'articulation de la bielle et du balancier. Les positions $A_1A'_1$ et $A_2A'_2$ de la bielle se trouvent alors (158) en prolongement de la manivelle. Il y aura donc pour la bielle possibilité de se mouvoir aussi bien d'un côté que de l'autre au point de vue géométrique, mais l'inertie déterminera la continuation du mouvement toujours dans le même sens. D'après cela, une demi-oscillation simple AA_1 du balancier conduira la bielle de AA' en $A_1A'_1$ par l'arc $A'A'_1$. Le retour suivant A_1A la ramènera de $A_1A'_1$ en AA' par l'arc $A'_1A'_2A'$. On reconnaît ainsi que les deux moitiés d'oscillation simple ont produit une révolution complète. Les deux autres, complétant l'oscillation double, donneront de même une seconde révolution.

181. Balancier et tige. — *Bras de pompe.* — Dans les

pompes de mines le mouvement est souvent transmis aux maîtresses tiges par l'intermédiaire d'un balancier et d'une bielle (*Pl. X, fig.* 157).

La même combinaison se présente encore dans les pompes à la main (*Pl. X, fig.* 158).

182. *Zigzag.* — On emploie pour certains jouets une série de losanges articulés dont les deux dernières branches peuvent être rapprochées à la main (*Pl. X, fig.* 159). Par là tous les losanges s'aplatissent à la fois et l'extrémité s'avance en ligne droite.

Ce système figure, réduit à un seul losange, dans le régulateur à boules. Quand la force centrifuge écarte les branches, le losange s'aplatit, et, comme le sommet supérieur est fixe, l'autre se meut sur la tige. C'est ce déplacement que l'on utilise pour la régulation (287).

183. *Système de Sarrut.* — En doublant la combinaison d'une tige et d'un balancier, M. Sarrut a obtenu un procédé rigoureux pour guider une tige en ligne droite (*Pl. X, fig.* 160). A cet effet, A et B sont deux axes fixes non concourants. A′, A″ et B′, B″ désignent d'autres axes respectivement parallèles aux premiers, mais mobiles dans l'espace, de telle sorte que leurs articulations M′, M″ et N′, N″ se meuvent dans des plans respectivement perpendiculaires à A et B en M et N. Les pièces MM′, M′M″, M″N″ sont par construction perpendiculaires aux articulations, et par suite comprises dans le premier de ces plans. De même NN′, N′N″, N″M″ ne sortent pas du second. On voit par là que la pièce M″N″ doit être située à la fois dans ces deux plans et qu'elle ne peut par conséquent se mouvoir que suivant leur intersection.

La rapport des vitesses de rotation est susceptible d'une expression fort simple. En effet, si nous menons par les centres M et N les perpendiculaires MH, NK sur l'inter-

section M″N″, nous aurons, en désignant par v la vitesse de la tige (156),

$$\frac{v}{\omega} = MH, \quad \frac{v}{\omega'} = NK,$$

et par suite

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{NK}{MH}.$$

Les vitesses angulaires sont donc en raison inverse des distances des centres à leurs bielles respectives estimées perpendiculairement à la tige commune.

CHAPITRE XII.

PARALLÉLOGRAMMES ET JOINTS.

§ I.

PARALLÉLOGRAMME DE WATT.

184. PARALLÉLOGRAMME SIMPLE. — Le parallélogramme simple de Watt est un exemple de la troisième catégorie (168) auquel son importance mérite une étude spéciale. Il présente la combinaison de deux balanciers situés de part et d'autre de la bielle. On l'emploie pour guider une tige sensiblement en ligne droite, de telle façon que l'erreur tombe au-dessous de la limite de flexibilité des pièces. On évite par là les frottements des glissières rectilignes (1).

Commençons par simplifier les conditions d'installation en supposant, suivant l'usage, les balanciers CA, C'A' égaux (*Pl. III, fig.* 41). Je les amène par la pensée à être

(1) La trajectoire d'un point d'une droite dont les extrémités s'appuient sur deux cercles s'appelle *courbe de Watt* ou *courbe à longue inflexion*. Son équation complète a été donnée par M. de Prony; elle est du sixième degré et d'une grande complication. Dans le cas où les cercles sont égaux et orthogonaux, et la bielle égale aux balanciers, elle se réduit à une lemniscate de Bernoulli, suivant une remarque du P. Carbonelle.

L'équation exacte n'est d'aucun secours pour l'étude du parallélogramme. On lui a substitué une grande quantité de calculs approximatifs de diverses natures qui exigent beaucoup de vérifications numériques. Je me suis proposé de leur substituer quelques considérations géométriques, approximatives aussi, mais fort simples et très-concluantes. Les calculs qui les suivent sont exacts et basés sur les dispositions adoptées depuis Watt.

parallèles à une direction que je considérerai comme horizontale, et je prends pour bielle la droite AA′ qui joint alors leurs extrémités. Dans ce système de données, le milieu M de la bielle est évidemment un centre de figure, il le sera par suite pour tout ce qui concerne le mouvement à en déduire. D'après cela, sa propre trajectoire aura son centre dans cette position spéciale. Or, une branche de courbe qui passe par son centre de symétrie y a nécessairement une inflexion. Quant à la tangente à cette inflexion, nous l'obtiendrons comme à l'ordinaire (152) en élevant une perpendiculaire à la droite qui se rend à l'intersection des balanciers. Mais ceux-ci sont tous les deux horizontaux. Il en est donc de même de la droite en question, et par suite la tangente est la verticale MM_1M_2.

C'est d'après cette considération que l'on admet que dans une certaine étendue le milieu M se meut sensiblement suivant cette verticale. Car une courbe se confond à peu près avec la tangente dans les environs du point de contact surtout et avec encore plus d'approximation lorsqu'il s'agit d'une inflexion. Mais il y a plus, et nous pouvons nous assurer que la trajectoire présentera trois inflexions rapprochées. En effet, elle est évidemment une courbe fermée, et comme la tangente à l'inflexion la traverse en M, elle doit la rencontrer de nouveau en un point M_1. Mais une courbe est toujours convexe vers sa tangente dans les environs du contact et, pour revenir à sa rencontre, elle doit devenir concave, c'est-à-dire offrir une inflexion dans l'intervalle. La symétrie exige, du reste, que cette seconde inflexion soit accompagnée d'une troisième.

Aux deux rencontres M_1 et M_2 le milieu de la bielle se retrouve rigoureusement sur la verticale du centre M. On peut donc étendre jusque-là avec Watt l'arc employé de trajectoire. Au delà commence l'incertitude. Cependant, M. Tchebitchew a proposé par une vue très-rationnelle de

l'étendre un peu au delà. Par là, en effet, on peut rester dans les mêmes limites d'écart et obtenir une plus grande excursion pour la tige, ce qui revient à dire que pour une excursion donnée on réalise un moindre écart. Rien n'empêche d'introduire ce perfectionnement dans la construction. Cependant je continuerai à adopter les dispositions de Watt pour calculer avec précision les éléments de la transmission.

185. Si d'abord nous menons en A et A′ les perpendiculaires $A'_1A'_2$ et A_1A_2, elles fourniront en $A_1A'_1$ et $A_2A'_2$ les positions extrêmes de la bielle. En effet, la figure AA′PP′ étant un rectangle, on a

$$PP' = AA'.$$

De plus, en raison de la symétrie par rapport au centre M,

$$A'_1P' = A_1P,$$

et par suite

$$A'_1P' = A_1P,$$

donc $A_1A'_1PP'$ est un parallélogramme et

$$A_1A'_1 = PP' = AA'.$$

Ainsi $A_1A'_1$ est une position de la bielle, et comme M_1 est évidemment son milieu, c'est la situation extrême cherchée.

La demi-amplitude sera donc l'angle ACA_1. Or, on a, dans le triangle rectangle A_1CP :

$$\overline{PA_1}^2 = \overline{CA_1}^2 - \overline{CP}^2,$$

c'est-à-dire

$$\overline{PA_1}^2 = (\overline{CK} + \overline{AK})^2 - (\overline{CK} - \overline{AK})^2,$$

et en décomposant la différence de carrés

$$\overline{PA_1}^2 = 4.\overline{CK}.\overline{AK}.$$

Watt s'imposait la condition que la distance horizontale des centres $2.\overline{CK}$ fût le triple de la corde $2.PA_1$,

$$\overline{CK} = 3\,\overline{PA_1}.$$

Il vient donc

$$\overline{PA_1} = 12.\overline{AK},$$

ou, en doublant,

$$\overline{A_1A_2} = 12.\overline{AP},$$

ce que Watt énonçait en disant que la flèche et la corde sont du pouce pour pied.

Nous pouvons, d'après cela, calculer l'amplitude x. On a en effet

$$\overline{A_1A_2} = 2.\overline{CA}\sin\frac{x}{2},$$

$$\overline{AP} = \overline{CA}\left(1-\cos\frac{x}{2}\right);$$

l'équation précédente devient dès lors

$$\sin\frac{x}{2} = 6\left(1-\cos\frac{x}{2}\right),$$

$$2\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4} = 12\sin^2\frac{x}{4},$$

d'où

$$\operatorname{tang}\frac{x}{4} = \frac{1}{6},$$

et, par suite,

$$x = 37^\circ\,50'\,56''.$$

Pour en déduire l'excursion de la tige ou la corde, nous aurons

$$\overline{A_1A_2} = 2\sin\frac{x}{2}\cdot\overline{CA} = \frac{4\operatorname{tang}\frac{x}{4}}{1+\operatorname{tang}^2\frac{x}{4}}\cdot\overline{CA} = \frac{24}{37}\,\overline{CA}.$$

Pour ces diverses déterminations, la longueur de la bielle reste arbitraire. Watt la prenait égale à l'excursion (1).

D'après cela, si on représente le balancier par le nombre 37, les différents éléments qui déterminent la construction du parallélogramme simple se résument ainsi :

Distance horizontale des centres.....	72
Balanciers.....	37
Bielle.....	24

à quoi nous joindrons les éléments du mouvement produit:

Corde.....	24
Flèche.....	2
Amplitude.....	37°5o′ 56″

186. PARALLÉLOGRAMME ARTICULÉ.—Le parallélogramme simple ne fournit qu'un seul point rectiligne qui est le milieu de la bielle. Le parallélogramme articulé en renferme une infinité. C'est une dérivation du précédent comme on va le comprendre (*Pl. XI*, *fig.* 161).

Prenant un parallélogramme simple CAA′C′ (*Pl. III*, *fig.* 42), prolongeons un des balanciers CA d'une longueur AB égale à lui-même, et construisons sur AB et sur AA′ un parallélogramme ABA′B′ articulé en ses quatre sommets. Cette figure ne cessera pas d'affecter la forme d'un parallélogramme, car elle sera toujours un quadrilatère dont les côtés opposés sont égaux. AM et BB′ resteront donc parallèles, et comme, dans les triangles semblables CAM, CBB′, CA est la moitié de CB, AM sera de même la moitié de BB′. Donc M est le point rectiligne du parallélogramme simple. De même CM sera la moitié de CB′, et par suite B′ décrira une courbe semblable à celle de M et semblablement placée. Il sera donc lui-même un point rectiligne.

(1) Il la diminuait aussi parfois d'une petite quantité qui ne dépassait pas le septième de sa valeur.

Si on veut s'en procurer une infinité d'autres à l'intérieur du parallélogramme, il suffira d'y installer une barre articulée telle que PP'. Les triangles CPH, CBB' seront encore semblables et établiront, comme tout à l'heure, que H est un point rectiligne. Pour en obtenir à l'extérieur, on installera le parallélogramme secondaire AMQQ', et les triangles semblables CQK, CAM montreront que K est également un point rectiligne.

Cherchons le rapport de transmission entre la tige et le balancier. Comme celui-ci reste parallèle à la pièce A'B', il aura la même vitesse angulaire, et comme B' est justement l'articulation de la tige, on voit que le rapport des vitesses de la tige et du balancier sera marqué par la distance de B' au centre instantané de la pièce A'B'. C'est donc ce point qu'il faut connaître.

Une première normale, celle de A', s'obtiendra en prolongeant le contre-balancier C'A'. Pour en trouver une seconde, menons par le centre C une parallèle CC_1 à la bielle AA'; elle lui sera égale dans le parallélogramme $AA'CC_1$, et par suite elle sera constante. C_1 décrira ainsi un cercle dont la normale sera cette parallèle elle-même, qui déterminera en Ω le centre instantané cherché. Il suffirait, par conséquent, pour avoir la direction rigoureuse de B', de mener une perpendiculaire à B'Ω.

On voit par là que le rapport de transmission est marqué à chaque instant par la distance de l'articulation de la tige à l'intersection du contre-balancier et de la parallèle à la bielle menée par le centre du balancier.

187. *Pantographe.* — Ce même principe est employé dans les bureaux graphiques pour la reproduction des figures par amplification ou réduction (*Pl. XI, fig.* 162).

On se sert, à cet effet, d'un instrument appelé *pantographe,* qui présente la figure des deux côtés d'un angle

variable reliés par deux autres pièces, formant avec elles un parallélogramme articulé ABCD. En D et D′ sont deux pointes, l'une sèche, l'autre traçante. En O se trouve un axe de rotation que l'on peut déplacer le long de la règle AC.

On installe cet axe en un point et on le pique sur la planche à dessin; puis on suit avec la pointe sèche les contours du dessin, et la pointe traçante reproduit une figure semblable. En effet les triangles OCD, OAD′ restent constamment semblables, de sorte que le rapport des rayons vecteurs OD, OD′ est toujours égal à celui des dimensions fixes OC, OA. On disposera de ce rapport d'échelles en faisant varier la position de O dans la rainure. De plus, le dessin se trouve amplifié ou réduit, suivant que la pointe sèche est placée en D ou en D′.

Machine Collas. — L'appareil précédent est disposé pour jouer dans un plan. En permettant aux joints de se mouvoir dans tous les sens, on obtient la machine Collas pour la reproduction des statues.

§ II.

JOINTS.

188. Les joints sont des exemples de la seconde catégorie (170) auxquels leur importance mérite également une étude spéciale. Ils présentent la combinaison de deux manivelles reliées par une bielle. On les emploie pour réunir deux bouts d'arbres tournants. A cet effet ces bouts se terminent par des demi-cercles ou *fourchettes*. Dans chacune d'elles une branche, disposée suivant un diamètre, peut jouer librement; ces deux branches sont assemblées à angle droit et constituent le *croisillon*, qui joue ici le rôle de bielle ou d'intermédiaire solide entre les arbres tournants. Mais le dispositif présente des différences importantes, suivant que

les arbres sont parallèles ou concourants. Dans le premier cas on a le joint d'Oldham, dans le second le joint Hollandais.

189. *Joint d'Oldham.* — Le joint d'Oldham sert à réunir deux bouts d'arbres parallèles (*Pl. XI, fig.* 163). Le croisillon se meut dans le plan mené perpendiculairement par leurs extrémités. Les plans des fourchettes s'y projetteront dès lors suivant leurs traces, c'est-à-dire suivant les bras du croisillon. Ils restent donc toujours perpendiculaires l'un sur l'autre, et tournent par conséquent ensemble des mêmes angles, de sorte que la transmission est uniforme.

Ces traces passant en projection par les pieds O, O′ des axes qui sont deux points fixes (*Pl. III, fig.* 43), le centre C du croisillon, qui est à leur intersection, occupera constamment le sommet d'un angle droit inscrit sur la ligne des centres. Il décrira donc le cercle dont cette ligne est le diamètre. On voit par là que les distances CA, CA′, CB, CB′ sont éminemment variables. Par conséquent, les bras devront être plus longs que le rayon des fourchettes et avoir la faculté de jouer dans leurs œillets en glissant de part en part.

Quant au mouvement du croisillon, il ne diffère pas, au point de vue relatif, de celui que nous avons déjà étudié (155). C'est celui d'un angle droit circonscrit à une droite fixe, tandis que nous avions envisagé le mouvement d'une droite invariable inscrite dans un angle droit. On peut donc le considérer comme le roulement d'un cercle sur un autre de rayon moitié placé à son intérieur.

190. *Joint Hollandais.* — Le joint Hollandais, appelé aussi *joint de Cardan* ou *joint universel,* sert à réunir deux bouts d'arbres convergents (*Pl. XI, fig.* 164), lors même que leur angle peut être appelé à varier, soit accidentelle-

ment, soit d'une manière continue, pendant la transmission de la rotation (1). Le croisillon pivote autour de son centre établi au point de concours des axes. Les tourillons décriront donc des courbes sphériques et pourront, par conséquent, être établis dans les œillets des fourchettes sans avoir la latitude de glisser de part en part.

Le mouvement instantané du croisillon étant un pivotement, admet à chaque instant un axe instantané (XI) qui doit être l'intersection des plans normaux à toutes les trajectoires simultanées. Or, nous en connaissons deux qui sont les cercles décrits par les tourillons. Leurs plans normaux, c'est-à-dire leurs méridiens, sont justement ceux des fourchettes, et par suite l'axe instantané se trouve à chaque instant à l'intersection des plans des fourchettes.

Le mouvement continu étant lui-même un pivotement, il suffit de considérer la sphère sur laquelle se meuvent les tourillons. Ceux-ci se déplaceront sur des grands cercles perpendiculaires aux axes. De plus, l'angle du bras étant droit, l'arc de grand cercle, qui joindra deux tourillons, sera constamment égal à un quadrant. Le mouvement continu du joint Hollandais est donc celui d'une bielle sphérique, égale au quadrant qui se meut entre deux grands cercles (2).

191. La transmission, dès lors, n'est pas uniforme, et il

---

(1) On l'emploie notamment pour briser des arbres de couche très-longs, afin de permettre les flexions qui proviendraient d'un tassement irrégulier du terrain. On utilise également le joint de Cardan comme suspension, d'après la possibilité qu'a le croisillon de se placer suivant toute espèce d'orientation.

(2) C'est là une question célèbre d'analyse. On sait que la rotation des deux côtés variables d'un triangle sphérique dont le troisième côté et l'angle opposé restent constants, et qui n'est autre d'ailleurs que la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique, revient sous forme différentielle à l'équation d'Euler, et sous forme finie aux formules d'addition des fonctions

importe de trouver à chaque instant le rapport des vitesses angulaires (*Pl. III, fig.* 44).

Concevons pour cela qu'on s'avance sur un des axes O vers le point de croisement C, et que l'on place, comme point de départ, le quadrant mobile suivant le grand cercle perpendiculaire à l'axe en KK', de telle sorte que son extrémité se trouve à l'intersection K des deux grands cercles. Si nous l'envisageons ensuite dans une position quelconque AA', les deux fourchettes auront tourné pour l'y amener des angles KA et K'A'. On aura alors, dans le triangle sphérique AKA',

$$\cos\overline{AA'} = \cos\overline{AK}\cos\overline{A'K} + \sin\overline{AK}\sin\overline{A'K}\cos AKA',$$

c'est-à-dire, en désignant par α l'angle des axes qui est le supplément de AKA',

$$\begin{aligned} 0 &= \cos\varphi\sin\varphi' - \sin\varphi\cos\varphi'\cos\alpha, \\ \tang\varphi' &= \tang\varphi\cos\alpha. \end{aligned} \qquad (1)$$

Il vient ensuite, en différentiant,

$$\frac{d\varphi'}{\cos^2\varphi'} = \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}\cos\alpha;$$

d'où l'on tire pour le rapport des vitesses angulaires

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{\cos^2\varphi'}{\cos^2\varphi}\cos\alpha = \frac{\cos^2\varphi'}{\cos^2\varphi}\cdot\frac{\tang\varphi'}{\tang\varphi} = \frac{\sin 2\varphi'}{\sin 2\varphi}.$$

Les vitesses ne seront donc égales qu'à l'instant où l'on aura

$$\sin\varphi\cos\varphi = \sin\varphi'\cos\varphi'$$

---

elliptiques. La considération du triangle constitue la méthode de Lagrange pour l'intégration de l'équation d'Euler. Dans le cas actuel, où le côté constant est un quadrant, le module du système elliptique est simplement le sinus de l'angle des axes.

ou

$$\frac{\operatorname{tang}\varphi}{1+\operatorname{tang}^2\varphi}=\frac{\operatorname{tang}\varphi'}{1+\operatorname{tang}^2\varphi'}=\frac{\operatorname{tang}\varphi\cos\alpha}{1+\operatorname{tang}^2\varphi\cos^2\alpha};$$

d'où l'on tire facilement

$$\operatorname{tang}^2\varphi=\frac{1}{\cos\alpha},\quad \operatorname{tang}\varphi=\frac{\pm 1}{\sqrt{\cos\alpha}},$$
$$\operatorname{tang}^2\varphi'=\cos\alpha,\quad \operatorname{tang}\varphi'=\pm\sqrt{\cos\alpha},$$

ce qui fournit quatre positions opposées deux à deux.

Quant aux limites de la variation, elles seront évidemment

$$\varphi=0,\quad \text{max.}=\frac{1}{\cos\alpha},$$
$$\varphi=90^\circ,\quad \text{min.}=\cos\alpha;$$

le rapport de ces limites est

$$\cos^2\alpha,$$

et l'irrégularité ou la différence à l'unité

$$\sin^2\alpha.$$

On remarquera que cette irrégularité est du second ordre pour les faibles angles des axes. Au contraire, pour ceux qui dépassent 45 degrés, la transmission devient fort irrégulière, exposée à l'enchevêtrement, et il est nécessaire de substituer au joint simple un joint multiple.

192. *Joints multiples.* — Le joint de Hooke est formé de la réunion de deux joints Hollandais par un arbre intermédiaire dont la longueur est réduite presque à rien, et que l'on établit entre les deux proposés, de manière à adoucir leur angle trop prononcé. On a employé aussi un joint triple. Plus généralement nous imaginerons un joint multiple d'un ordre quelconque.

Je suppose, pour fixer les idées, que l'on installe tous les joints simultanément dans la position initiale que j'ai dé-

finie (191), c'est-à-dire qu'en parcourant le polygone des axes on rencontre tous les croisillons dans des plans perpendiculaires aux côtés sur lesquels on s'avance vers eux. Si, à partir de là, on attribue un dérangement quelconque au système, on pourra appliquer l'équation fondamentale (1) à chacun des joints, et on aura, en désignant d'une manière générale par $(\varphi_n \varphi_{n+1})$, l'angle des axes de rangs n et $n+1$,

$$\begin{aligned} \operatorname{tang}\varphi_0 &= \operatorname{tang}\varphi_1 \cos(\varphi_0\varphi_1), \\ \operatorname{tang}\varphi_1 &= \operatorname{tang}\varphi_2 \cos(\varphi_1\varphi_2), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ \operatorname{tang}\varphi_{k-1} &= \operatorname{tang}\varphi_k \cos(\varphi_{k-1}\varphi_k). \end{aligned}$$

On en déduit, en multipliant membre à membre,

$$\operatorname{tang}\varphi_0 = \operatorname{tang}\varphi_k . \cos(\varphi_0\varphi_1)\cos(\varphi_1\varphi_2)\ldots\cos(\varphi_{k-1}\varphi_k);$$

et, en particulier, si les axes font des angles égaux,

$$\operatorname{tang}\varphi_0 = \operatorname{tang}\varphi_k . \cos^k\alpha.$$

Dans l'un ou l'autre cas, la formule fondamentale (1) a conservé la même forme, le coefficient seul a changé.

193. Il est très-essentiel d'avoir égard à la restriction que nous avons imposée pour les positions initiales. Si on lui en substitue d'autres, le résultat est complétement modifié.

Considérons, par exemple, un joint de Hooke établi dans les conditions précédentes et pour des axes parallèles; les angles qu'ils feront avec l'arbre intermédiaire seront alternes-internes, c'est-à-dire égaux, et on aura

$$\operatorname{tang}\varphi_0 = \operatorname{tang}\varphi_2 . \cos^2\alpha.$$

Supposons, au contraire, que les plans des croisillons se trouvent simultanément perpendiculaires aux arbres extrêmes : la formule du joint simple s'appliquera en plaçant les observateurs successivement sur chacun de ces

arbres, de manière qu'ils se regardent au lieu de se suivre. On aura ainsi

$$\operatorname{tang}\varphi_0 = \operatorname{tang}\varphi_1 \cos\alpha,$$
$$\operatorname{tang}\varphi_2 = \operatorname{tang}\varphi_1 \cos\alpha,$$

et par suite

$$\varphi_0 = \varphi_2,$$

la transmission est devenue uniforme.

C'est ce qui aura lieu, d'une manière générale, dans un joint multiple d'ordre pair et d'angles égaux, en disposant chaque moitié de l'ensemble des joints de la manière prescrite, mais pour des observateurs qui s'avancent en sens contraire. On peut, du reste, prendre ces joints dans un ordre quelconque.

CHAPITRE XIII.

CORDES.

§ I.

GÉNÉRALITÉS.

194. Nous comprenons sous la dénomination de *cordes* les organes dont les deux pièces principales sont mises en relation par un intermédiaire flexible (XXV).

Ces intermédiaires sont de trois sortes différentes. La première, celle des *cordes* proprement dites, se distingue par sa section grossièrement ronde. Elle comprend les cordes en chanvre, les cordes en écorce, les cordes en aloès, les câbles en fil de fer.

La seconde, celle des *courroies*, se distingue par une section à peu près rectangulaire. Elle comprend les *sangles*, rarement employées; les *câbles plats*, formés de plusieurs cordes assemblées côte à côte et servant à l'extraction des mines, les *courroies de cuir*, auxquelles le corroyage laisse un côté poli et un côté rugueux, condition avantageuse pour leur emploi.

La troisième, celle des *chaînes*, comprend des systèmes qui sont plutôt articulés que flexibles. C'est une série de chaînons de fer qui peuvent jouer l'un par rapport à l'autre. On emploie la *chaîne ordinaire* (*Pl. XI*, *fig.* 165), la chaîne dite de *Vaucanson*, bien qu'elle ait été décrite antérieurement par Agricola (1) (*Pl. XI*, *fig.* 166), la chaîne de Gall

(1) *De re metallica*, 1546.

simple ou double (*Pl. XI, fig.* 167). La chaîne ordinaire peut jouer dans tous les sens ; celles de Vaucanson et de Gall restent forcément dans un plan.

195. Les cordes peuvent agir de deux manières : en tirant sur des points d'attache ou en passant sur des points d'appui. Dans le premier cas elles fonctionnent exactement comme des bielles et ne méritent pas d'être envisagées de nouveau. Nous en avons vu un exemple dans la pédale du rémouleur (178).

Pour passer sur des profils d'appui, elles peuvent fonctionner par glissement ou par enroulement. Le premier mode, sauf des cas tout à fait spéciaux, est généralement banni des transmissions, car il donne lieu à une résistance énorme, comme nous le verrons plus tard (400).

196. Méthode générale.—Les cordes fonctionnent donc, en général, par enroulement. Je vais faire voir que le profil d'appui peut alors se déterminer d'une manière générale d'après la loi de mouvement qu'on veut lui attribuer. Je supposerai pour cela, comme à l'ordinaire, qu'on l'installe autour d'un axe de rotation, et que la corde soit tirée avec une vitesse constante v en restant parallèle à elle-même. Enfin, je me donnerai la loi de rotation qu'il s'agit de produire sous la forme

$$t = f(\theta)$$

en résolvant son équation par rapport au temps.

Le profil tournant de l'angle $d\theta$, tandis que la corde reste parallèle à elle-même, il revient au même de supposer que le profil est fixe et que sa tangente se déplace de $d\theta$ en sens inverse. La rotation élémentaire du profil est donc égale à son angle de contingence, c'est-à-dire à l'angle azimutal de sa podaire; et, par suite, la relation qui existera entre le bras de levier p de la corde et l'angle de rotation θ sera

l'équation en coordonnées polaires p et θ de la podaire du profil.

Cette relation est évidemment

$$v = p\omega,$$

car la corde enroulée sur le profil agit comme une bielle qui serait attachée à l'extrémité de son bras de levier p, et qui posséderait ainsi la valeur de rotation $p\omega$. On peut l'écrire

$$p = v\frac{dt}{d\theta},$$

c'est-à-dire

$$p = vf'(\theta).$$

Telle est l'équation de la podaire, et, en lui appliquant la méthode générale qui a déjà été indiquée (66), on trouvera son antipodaire, c'est-à-dire le profil lui-même.

197. Exemple I. — Supposons une rotation en raison de la racine carrée du temps

$$\theta = k\sqrt{t},$$

$$t = \frac{\theta^2}{k^2},$$

la podaire sera

$$p = \frac{2v}{k^2}\theta,$$

c'est-à-dire une spirale d'Archimède. Nous avons reconnu, d'après cela, que son antipodaire est une développante de cercle (67, II).

Exemple II. — Si l'on veut que la rotation croisse en progression arithmétique quand le temps croît en progression géométrique, on posera

$$\theta = k\log t,$$

$$t = e^{\frac{\theta}{k}},$$

$$p = \frac{v}{k}e^{\frac{\theta}{k}},$$

la podaire étant une spirale logarithmique, nous avons reconnu que l'antipodaire est une spirale égale (66, note).

EXEMPLE III. — Si l'on veut une rotation uniforme, on posera

$$\theta = kt,$$
$$t = \frac{\theta}{k},$$
$$p = \frac{v}{k}.$$

La podaire est donc un cercle concentrique qui est à lui-même son antipodaire (67, I). Ainsi, le profil de transmission uniforme est un cercle décrit autour du centre de rotation. Ce résultat, évident par lui-même, est, sans qu'il soit besoin d'en avertir, de beaucoup le plus employé dans les machines.

198. Les profils sur lesquels passent les cordes se distinguent, d'après leur mode d'action, en deux catégories suivant que la corde fait moins ou plus qu'un tour entier. Nous aurons dans le premier cas les *poulies*, dans l'autre les *tambours*.

Ajoutons que les cordes peuvent encore fonctionner suivant un mode tout spécial, dans lequel on réunit leurs deux extrémités de manière à ce qu'elles forment une courbe fermée. On obtient par là les *cordes sans fin*. On peut, par ce procédé, obtenir un mouvement progressif, tandis qu'avec le mode ordinaire le mouvement est nécessairement alternatif, attendu que, quand la corde est déroulée d'un bout à l'autre, il faut nécessairement revenir vers la première extrémité. Il est inutile, quand on emploie cette disposition, de faire faire à la corde plusieurs tours sur le profil d'appui.

Nous diviserons donc cette étude en trois parties :

PREMIÈRE CATÉGORIE. — *Poulies*.

DEUXIÈME CATÉGORIE. — *Tambours*.

TROISIÈME CATÉGORIE. — *Courroies sans fin*.

§ II.

POULIES.

199. *Poulies simples.* — La poulie est le point d'appui sur lequel la corde passe en faisant moins d'un tour (*Pl. XI, fig.* 168). On y distingue deux parties : l'une fixe, appelée *chape,* amarrée par un crochet à un point fixe; l'autre mobile, ou *noyau* de la poulie, pouvant tourner autour d'un axe que porte la chape.

Le noyau est ordinairement rond pour les cordes ou les courroies. Pour les chaînes, on emploie un polygone régulier, dont le côté est déterminé d'après le chaînon. On peut aussi, comme dans l'ancienne machine à vapeur de Savary et Newcomen, n'avoir qu'un simple secteur (*Pl. XI, fig.* 169) lorsque le mouvement est alternatif.

La jante du noyau est creusée en demi-tore, ou en double cône pour les cordes; légèrement bombée pour les courroies, dont cette forme facilite l'adhérence; plate et garnie de saillies pour les chaînes de Gall et de Vaucanson. M. Neven construit encore des jantes polygonales dont les faces sont alternativement plates ou creusées en rainure pour la chaîne ordinaire dont les chaînons se succèdent dans des plans perpendiculaires l'un à l'autre.

Les poulies sont *à axe* lorsque le noyau porte un axe et la chape des œillets, ou *à œil* lorsque c'est l'inverse.

Elles sont *calées* lorsqu'elles sont solidaires avec l'arbre qui les porte, ou *folles* quand elles tournent librement sans lui.

Les poulies sont encore appelées *fixes* quand la chape est fixe, et *mobiles* lorsqu'elle se meut dans l'espace. A proprement parler, c'est l'axe de la poulie auquel se rapporte cette désignation.

200. *Poulie mobile.* — La combinaison la plus simple est celle d'une poulie fixe et d'une poulie mobile qui porte ordinairement un poids, et dont on détermine l'élévation en tirant sur le brin libre (*Pl. XI, fig.* 170). Il existe entre la vitesse de tirage du brin et la vitesse d'élévation du poids un rapport très-simple qu'il n'est pas inutile de connaître.

On a, en effet, en projetant horizontalement et verticalement le contour qui s'étend du point d'attache au point maximum de la poulie fixe,

$$a = (\lambda + \lambda')\sin\varphi + (2r + r')\cos\varphi,$$

ou, en différentiant,

$$0 = \sin\varphi . d(\lambda + \lambda') + [(\lambda + \lambda')\cos\varphi - (2r + r')\sin\varphi]\, d\varphi.$$

D'autre part,

$$y = \lambda\cos\varphi - r\sin\varphi,$$
$$y = \lambda'\cos\varphi - (r + r')\sin\varphi - b,$$

et en ajoutant,

$$2y = (\lambda + \lambda')\cos\varphi - (2r + r')\sin\varphi - b,$$

puis différentiant

$$2dy = \cos\varphi . d(\lambda + \lambda') - [(\lambda + \lambda')\sin\varphi + (2r + r')\cos\varphi]\, d\varphi.$$

Si maintenant on multiplie les deux équations différentielles par $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$ et qu'on les ajoute, il vient

$$2dy\cos\varphi = d(\lambda + \lambda') - (2r + r')\, d\varphi.$$

Si enfin on évalue le contour lui-même, on trouve

$$l = (\lambda + \lambda') + (\pi - 2\varphi)\left(r + \frac{1}{2}r'\right),$$
$$dl = d(\lambda + \lambda') - (2r + r')\, d\varphi.$$

On a donc, en profitant de la réduction remarquable qui s'opère

$$dl = 2\,dy\cos\varphi,$$

d'où le rapport des vitesses de tirage et d'élévation

$$\frac{dl}{dy} = 2\cos\varphi.$$

201. *Moufles.* — La combinaison précédente constitue le cas le plus simple des moufles ou palans. On y peut distinguer deux chapes, supérieure et inférieure, portant chacune plusieurs poulies. Une corde, attachée à un crochet qui est fixé lui-même à l'une des chapes, passe alternativement sur les poulies de la seconde et de la première, et se détache librement de la dernière poulie de la chape supérieure. Le module sera donc pair ou impair, suivant que le crochet se trouvera à la chape supérieure ou inférieure. Nous le désignerons par n.

Supposons les chapes assez éloignées pour que l'on puisse considérer tous les cordons comme parallèles. Une élévation donnée du poids ou un rapprochement des chapes occasionne un raccourcissement égal de chacun des n brins et, par suite, un tirage n fois plus grand du brin libre. Ainsi donc le rapport des vitesses de tirage et d'élévation est marqué par le nombre des poulies; d'où il faut conclure immédiatement qu'on ne peut réaliser au moyen des moufles que des rapports de transmission exprimés par des nombres entiers; condition encore plus restreinte que celle que nous avons obtenue pour les engrenages (109).

D'après cela, considérons le brin de rang k à partir de celui qui est fixé au crochet et que nous considérons comme ayant le rang zéro. On peut l'envisager comme le brin libre d'une moufle de k poulies. Sa vitesse sera dès lors k fois celle d'élévation. On voit par là que les vitesses des différents brins croissent en progression arithmétique.

Comme d'ailleurs ces vitesses sont égales à celles des jantes, puisqu'il n'y a pas de glissement, et que celles-ci sont le produit des vitesses angulaires par les rayons, on peut employer deux dispositions différentes : ou bien des poulies à œil ayant même rayon et libres de prendre des vitesses en progression arithmétique, ou bien des poulies calées sur un même axe et prenant par suite une même vitesse avec des rayons en progression arithmétique.

202. Les moufles que l'on rencontre dans les machines se rattachent à trois types différents.

Dans le *palan* ordinaire employé par la marine et par les pontonniers, les poulies sont égales et emboîtées dans une enveloppe qui les garantit des chocs. Elles doivent donc être à œil et enfilées sur l'axe de la chape (*Pl. XI, fig.* 171).

Dans la *moufle de White,* les poulies ne forment qu'un seul corps pour chaque chape. Elles ont alors nécessairement des rayons en progression arithmétique (*Pl. XI, fig.* 172).

Dans la *moufle plate,* les poulies sont placées l'une au-dessous de l'autre. On prend ainsi beaucoup de place en hauteur, mais on en gagne en épaisseur. Les rayons vont en diminuant, afin d'éviter que les brins ne se gênent mutuellement (*Pl. XI, fig.* 173).

203. *Trains de moufles.* — On augmente encore la rapidité de la transmission en disposant une série de moufles à la suite l'une de l'autre, de manière que le brin libre de chacune soit amarré au crochet de la moufle suivante. La *fig.* 174, *Pl. XI,* représente ce dispositif. Les chapes fixes ont été marquées de la lettre F et les chapes mobiles sont désignées par M.

Cherchons le rapport de la vitesse de tirage v_t du brin libre de la dernière moufle et de la vitesse d'élévation v_e de la chape mobile de la première. Nous aurons pour cha-

cune des moufles, d'après le résultat précédent (201),

$$\begin{aligned} v_1 &= n_1 v_0, \\ v_2 &= n_2 v_1, \\ v_3 &= n_3 v_2, \\ &\dots\dots\dots \\ v_k &= n_k v_{k-1}. \end{aligned}$$

et, en multipliant membre à membre (1),

$$\frac{v_k}{v_0} = n_1 n_2 n_3 \dots n_k.$$

Dans le cas particulier où toutes les moufles ont le même nombre de poulies, cette formule devient

$$\frac{v_k}{v_0} = n^k.$$

204. Il est important de savoir si cette combinaison doit être préférée à une moufle simple qui comprendrait les nk poulies employées.

Le rapport des vitesses serait alors nk, et, par suite, il y aura avantage, s'il est moindre que n^k, car un même nombre de poulies produira avec le train une modification plus sensible; ce qui revient à dire qu'à transformation égale, le train exigera moins de poulies que la moufle simple. Cherchons donc si la quantité

$$n^k - nk$$

est positive. Nous pourrons pour cela lui substituer cette autre plus simple

$$n^{k-1} - k,$$

car n et k sont positifs comme étant égaux ou supérieurs

(1) On peut aussi, pour réaliser des rapports de vitesse fractionnaires, au lieu de relier la chape inférieure de l'une des moufles au brin libre de la suivante, mettre directement en communication les deux chapes inférieures.

à 2. Or cette fonction s'annule dès que $n=k=2$, et elle reste toujours croissante ; car sa dérivée relative à k

$$n^{k-1}\log n - 1$$

est elle-même positive pour les valeurs initiales $n=k=2$ (qui la réduisent à la valeur $\log 4 - 1$, dans laquelle le logarithme est népérien), et toujours croissante avec n et k.

205. On peut encore chercher le module le plus convenable, c'est-à-dire celui qui rendra minimum le nombre de poulies à égalité de rapport de vitesses.

Dans ce but, nous poserons

$$n^k = a,$$

d'où, en prenant les logarithmes népériens,

$$k = \frac{\log a}{\log n}.$$

Le nombre de poulies deviendra par là

$$nk = \log a \ \frac{n}{\log n}.$$

Si nous égalons à zéro sa fonction dérivée, il viendra

$$\log n - 1 = 0,$$
$$n = e = 2,71828\ldots$$

Nous prendrons donc celui des deux nombres entiers qui comprennent e, pour lequel $\frac{n}{\log n}$ a la moindre valeur

$$n = 3.$$

On pourra, à l'aide de ces moufles triples, réaliser les rapports suivants de vitesses :

$k=$	1,	2,	3,	4,	5...,
$a=n^k=$	3,	9,	27,	81,	243....

§ III.

TAMBOURS.

206. Le tambour est le point d'appui sur lequel la corde passe en faisant plus d'un tour.

Le tambour s'appelle *treuil* quand son axe est horizontal, et *cabestan* quand il est vertical.

Les tambours sont en général cylindriques. On en construit aussi de coniques pour faire varier le rayon (270). Parfois, pour assurer l'enroulement, on y trace en creux une spirale, ce qui produit les *fusées*. Citons encore les *bobines* à câbles plats, qui sont des cylindres très-courts munis de joues d'un très-grand rayon, entre lesquels le câble s'enroule sur lui-même de manière à faire varier, par ses épaisseurs accumulées, le rayon d'enroulement (271). Ces diverses formes se rencontrent dans les appareils d'extraction des mines.

207. D'après ce qu'on a vu (196), la vitesse de tirage

$$v = \omega r$$

est en raison composée de la vitesse de rotation et du rayon du treuil. Si donc on veut réaliser des rapports excessivement faibles de vitesse, on se trouvera conduit à employer des rayons très-petits, chose impossible, car ce faible rapport de vitesses correspond précisément aux efforts les plus intenses qui détermineraient inévitablement la rupture de l'appareil.

On emploie, pour lever cette difficulté, le *treuil différentiel* ou *chèvre de Lombard*, formé de deux treuils ordinaires de rayons R et r très-peu différents (*Pl. XI, fig.* 175). La corde s'enroule dans le même sens sur tous les deux et le passage de l'un à l'autre s'effectue par une spire très-lâche

descendant au niveau du poids qu'il s'agit d'élever. Un tour de l'appareil produit un enroulement $2\pi R$ de l'un des brins, un déroulement $2\pi r$ de l'autre, c'est-à-dire une variation $2\pi(R - r)$ de la spire lâche, ou une élévation $\pi(R - r)$ de la poulie mobile qui y est engagée, si nous considérons, pour plus de simplicité, les deux brins comme parallèles.

Rien n'empêche dès lors de réaliser un rapport de vitesse aussi petit qu'on le voudra en prenant des rayons presque égaux. Mais il est évident que la longueur de la corde et par suite celle du treuil deviennent excessives, puisqu'il faut, pour cette faible élévation, un tour de corde, et que le rayon doit être assez notable pour résister au poids considérable que l'on entreprend de soulever.

On a supprimé cet inconvénient dans le *palan différentiel* de Wilson. Chacun des deux brins fait moins d'un tour sur les deux poulies peu différentes que l'on substitue aux deux portions du tambour; puis ils redescendent et se soudent en corde sans fin en passant sous une seconde poulie mobile. Celle-ci se meut en sens inverse de l'autre et de quantités égales, puisque la longueur totale de la corde reste fixe.

208. Sauf le cas des bobines, la corde s'enroule par spires contiguës. Pour assurer la régularité de l'enroulement, on peut employer, comme dans certaines charrues à vapeur, un petit *chariot d'enroulement* (*Pl. XI, fig.* 176), qui se meut le long du treuil sous l'empire du mécanisme lui-même. On s'arrange pour cela de manière que sa marche soit proportionnelle à la longueur enroulée et qu'il se trouve, par suite, toujours en face du point d'enroulement. Il se compose simplement d'un châssis qui porte deux rouleaux entre lesquels passe la chaîne.

Quand la longueur de la corde devient considérable,

comme dans la méthode de sondage à la corde appelée *procédé chinois*, il devient nécessaire de donner au treuil un grand développement suivant la génératrice. Si, en effet, l désigne la longueur du treuil et L celle de la corde, d et D leurs diamètres, n le nombre de tours, on aura

$$L = n\pi d, \qquad l = nD,$$
$$\frac{LD}{ld} = \pi.$$

Lorsque la longueur devient absolument indéfinie, comme dans le cas du remorqueur à chaîne dont nous parlerons bientôt (211), aucune longueur de treuil ne saurait plus suffire. On ne lèverait pas davantage la difficulté en faisant seulement passer la corde sur le tambour par un petit nombre de tours, et déroulant l'autre partie au fur et à mesure que la première s'enroule. Car bien que la corde occupât un faible emplacement sur le treuil, cet espace irait sans cesse en se déplaçant le long de ce treuil de toute la longueur qui vient d'être calculée. On emploie, pour remédier à cet inconvénient, un *double treuil cannelé*, qui présente plusieurs gorges sur lesquelles la corde passe en allant d'un treuil à l'autre (*Pl. XI, fig.* 177). Chacun d'eux fonctionne par là, à plusieurs reprises successives, comme poulie, la corde faisant chaque fois moins d'un tour, et la difficulté inhérente aux tambours se trouve, comme dans le palan différentiel (207), radicalement supprimée.

209. On peut employer les tambours de deux manières différentes. Dans la première, le treuil a son axe fixe et la corde file suivant sa longueur, comme dans les treuils de puits ou de sondage. Dans la seconde, la corde est fixe et l'axe du treuil possède un mouvement de translation, comme lorsqu'un navire se rapproche de son ancre en en-

roulant la chaîne sur un cabestan ; ou encore, comme dans les échafaudages mobiles suspendus à des poulies par des cordes que les ouvriers enroulent sur un treuil, de manière à élever eux-mêmes la planche qui les porte.

PREMIER GENRE. — *Tambour fixe.*

DEUXIÈME GENRE.— *Corde fixe.*

210. TAMBOUR FIXE. — *Balancier à lanières.* — On transforme la rotation alternative du treuil en va-et-vient de la tige au moyen de lanières qui sont attachées dans les deux sens, car elles ne peuvent agir que par traction (*Pl. XI, fig.* 178).

Archet à forer. — La mèche de l'outil est environnée de la corde en hélice élastique qui sous-tend un archet (*Pl. XI, fig.* 179). L'ouvrier imprime à cet archet un mouvement alternatif rapide, et chaque course fait faire un assez grand nombre de tours à l'outil qui a un faible diamètre.

Drille. — La mèche passe dans une sorte de cadre sur lequel la main appuie de haut en bas (*Pl. XI, fig.* 180). Les cordes, qui sont amarrées à une hauteur donnée, se déroulent sous l'empire de cette tension et déterminent la rotation du corps. Sa vitesse acquise les enroule ensuite en sens contraire en remontant le cadre sur lequel la main a cessé d'appuyer. Après quoi tout recommence.

211. CORDE FIXE. — *Chariot des mull-jenny.* — On obtient un guide très-sûr du mouvement rectiligne (*Pl. XI, fig.* 181) en engageant entre deux cordes tendues un petit chariot porteur de deux cabestans sur lesquels les cordes passent en dessinant un Z. Le moindre écart du chariot provoque dans la corde un accroissement notable de tension qui le ramène dans la ligne.

Remorqueur à chaîne. — On avait établi dans les der-

niers siècles, pour franchir un rapide du Rhin situé près de Bingen et nommé Bingerlock, un bateau stationnaire portant un treuil et deux roues pendantes. Sur ce treuil passait un câble amarré en amont du passage. Le courant de l'eau faisait tourner les roues et le treuil en enroulant la corde. Mais comme celle-ci était amarrée, le remorqueur était forcé de remonter les bateaux auxquels on l'attelait.

Aujourd'hui ce principe est appliqué d'une manière plus simple dans le lit de la Seine. Une chaîne est noyée et amarrée à ses deux extrémités. Elle se relève pour passer sur le remorqueur qu'elle traverse de l'avant à l'arrière en faisant plusieurs tours sur un double treuil cannelé (208) que manœuvre une machine à vapeur. La rotation du treuil provoque de la même manière le mouvement du remorqueur d'aval en amont. La force de la vapeur a seulement remplacé celle du courant.

§ IV.

COURROIES SANS FIN.

212. Les courroies sans fin sont celles dont les deux extrémités sont réunies ensemble d'une manière fixe, ou encore par une boucle qui permet d'en faire varier dans des limites restreintes la longueur et la tension. Nous en distinguerons deux sortes, suivant que la transmission est ou non uniforme.

PREMIER GENRE.— *Transmission uniforme.*

SECOND GENRE. — *Transmission variable.*

213. TRANSMISSION UNIFORME. — On emploie des poulies circulaires (197, III). La courroie étant inextensible, tous ses points possèdent la même marche. Et comme elle passe sans glisser sur les poulies, ces dernières ont toutes les deux

la même vitesse à la circonférence

$$\omega r = \omega' r',$$
$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{r'}{r}.$$

Ainsi le rapport de transmission est en raison inverse des rayons des poulies (1).

Un système de courroies sans fin est à ce point de vue l'équivalent d'un train d'engrenages (106). Il a l'inconvénient de ne pouvoir être employé pour de trop grands efforts; car on s'exposerait à la rupture des brins. De plus, quoiqu'on puisse avec les cordes reculer à volonté la limite d'adhérence, comme nous le verrons plus tard, le glissement reste toujours possible sous de trop grands efforts. Mais il convient d'ajouter que cela même devient un avantage dans les machines exposées à des chocs brusques qui provoqueraient la rupture des dents d'engrenage. En outre, rien ne s'oppose à ce que le rapport de transmission soit quelconque, ce qui n'a pas lieu pour les roues dentées.

214. Lorsque les axes sont parallèles, on place les poulies dans un même plan perpendiculaire, et on établit les brins suivant leurs tangentes communes. Mais on peut employer les tangentes extérieures (*Pl. XII, fig.* 182) ou intérieures (*Pl. XII, fig.* 183).

Ce dernier mode est préférable, comme augmentant l'angle d'enroulement, et par suite l'adhérence (405). Mais, comme il est nécessaire que les courroies adhèrent toujours par la face rugueuse, on est forcé de faire subir à chacun des deux brins une torsion de 180 degrés dans l'intervalle

(1) Dans la réalité, l'extension momentanée que subissent les parties successives de la courroie, dans la portion qui marche de la poulie conduite à la poulie motrice, donne à celle-ci un léger excédant de vitesse. Suivant M. Kretz, on peut l'évaluer à $\frac{1}{75}$.

libre. Cette torsion a d'ailleurs l'avantage de faire que les brins se rencontrent par le plat et non par la tranche. On exécute la torsion dans un sens tel, que la rencontre ait lieu par la face polie.

215. Lorsque les axes ne se rencontrent pas, on leur mène deux plans perpendiculaires (*Pl. XII, fig.* 184). Dans chacun, on abaisse du pied de l'axe correspondant une perpendiculaire sur l'intersection de ces plans, et l'on obtient ainsi les rayons des poulies qui seront alors tangentes à cette intersection.

Un pareil système ne saurait fonctionner dans les deux sens sans déterminer la chute de la courroie de dessus les poulies. Il faut, en effet, que le brin qui arrive se présente, ou à peu près, dans le plan de la poulie, sans quoi il tendrait à être incessamment rejeté de côté, au lieu d'adhérer le long de la jante. Or, lorsque les poulies ne sont pas trop rapprochées, il existe peu de différence entre les points de contact A et B sur la poulie O des tangentes AC′ et BB′ à la poulie O′. Par suite, sauf une erreur sans importance pour ce genre d'appréciation, on peut les considérer comme un seul point AB, et de même les deux autres comme un seul point A′B′. D'après cela, si l'on marche dans le sens des flèches, le brin AC′ qui arrive sur la poulie O′ se présente dans son plan, car il part du point AB qui appartient aux deux plans et arrive en un point C′ du plan de la poulie. Il en est de même du second brin. Tandis que, si l'on marchait à contre-sens, le brin C′A qui est dans le plan de la poulie O′ ne se présenterait plus dans celui de la poulie O.

216. Pour apprécier dans ce cas le rapport des vitesses, je construirai une figure d'après les procédés de la géométrie descriptive (*Pl. III, fig.* 45). Prenons pour ligne de terre l'un des axes AB; pour plan vertical un plan parallèle au second axe dont les projections seront alors A_1B_1, $A'_1B'_1$.

Les plans des deux poulies perpendiculaires à ces axes seront DCD′ et C'_1D_1K. Leur intersection ou la tangente commune sera l'horizontale projetée en CD et en T. Enfin les rayons des poulies se trouveront projetés en vraie grandeur en CT, C'_1T.

Désignons par r et r_1 ces rayons; par δ, δ_1 les longueurs des axes à partir de leur perpendiculaire commune OO_1, à savoir, OC et OC′; enfin par α leur angle. Nous aurons, en projetant les deux contours équivalents OCT et OC'_1T successivement sur CT et sur C′T,

$$r = r_1 \cos\alpha + \delta_1 \sin\alpha,$$
$$r_1 = r\cos\alpha - \delta \sin\alpha,$$

d'où

$$\delta_1 \sin\alpha = r - r_1 \cos\alpha,$$
$$\delta \sin\alpha = r\cos\alpha - r_1,$$

et, par suite,

$$\frac{\delta_1}{\delta} = \frac{r - r_1\cos\alpha}{r\cos\alpha - r_1} = \frac{\dfrac{r}{r_1} - \cos\alpha}{\dfrac{r}{r_1}\cos\alpha - 1}.$$

Si maintenant on pose

$$\frac{\delta}{\delta_1} = m, \quad \frac{r}{r_1} = n,$$

on obtiendra indifféremment

$$m = \frac{n\cos\alpha - 1}{n - \cos\alpha}, \quad n = \frac{m\cos\alpha - 1}{m - \cos\alpha},$$

ou, sous une forme symétrique,

$$\cos\alpha = \frac{mn + 1}{m + n}.$$

Lors donc que l'on voudra réaliser un rapport n de vitesses, on obtiendra par cette formule celui m des distances des plans des poulies à la perpendiculaire commune des axes.

Mais la grandeur absolue de ces distances et celle des poulies restent arbitraires. Si l'on cherche le lieu de la droite T correspondant à tous les systèmes que l'on peut employer, on pourra le représenter par son équation entre δ et r. Elle sera, en substituant à δ_1 sa valeur précédente :

$$\frac{n\cos\alpha - 1}{n - \cos\alpha} = m = \frac{\delta \sin\alpha}{\delta_1 \sin\alpha} = \frac{\delta \sin\alpha}{r - r_1 \cos\alpha} = \frac{\delta \sin r}{r - \frac{r}{n}\cos\alpha}$$

$$= \frac{\delta}{r}\,\frac{n\sin\alpha}{n - \cos\alpha},$$

c'est l'équation d'un plan qui a pour inclinaison

$$\operatorname{tang}\alpha_1 = \frac{n\sin\alpha}{n\cos\alpha - 1}.$$

En rapportant les angles aux plans bissecteurs, on obtient cette formule plus élégante au moyen de transformations que je supprime pour abréger

$$\operatorname{tang}\beta_1 = \frac{n+1}{n-1}\operatorname{tang}\beta.$$

217. Transmission variable. — *Rouleau tenseur.* — Un premier mode consiste dans l'emploi d'une poulie non circulaire communiquant avec une autre poulie circulaire (*Pl. XII, fig.* 185). En supposant la rotation de cette dernière uniforme et négligeant l'obliquité du cordon, on déterminera le profil inconnu par la méthode générale (196).

218. *Fusées complémentaires.* — On peut aussi employer une fusée dont le rayon varie à chaque instant (*Pl. XII, fig.* 186); mais il devient nécessaire de déterminer en conséquence la fusée conjuguée. M. Roland a fait remarquer à cet égard que, quel que soit le profil de la fusée, le profil conjugué est complémentaire; en ce sens qu'il

s'emboîterait exactement avec le premier si l'on rapprochait les axes parallèlement à eux-mêmes. Cet énoncé suppose à la vérité que l'on emploie des courroies à tangentes intérieures.

La question est simplement de montrer que la somme des arcs embrassés et des tangentes intérieures communes à deux cercles reste constante lorsque la somme de leurs rayons reste elle-même invariable (*Pl. III*, *fig.* 46). Car alors la même courroie pourra toujours fonctionner sur ces deux cercles. On sait, en effet, que les tangentes intérieures sont parallèles à celles qui seraient menées de l'un des centres à un cercle concentrique à l'autre et décrit avec la somme des rayons, qui reste constante par hypothèse. Les rayons sur lesquels se trouvent les points de contact sont les mêmes pour ces tangentes de construction et pour les tangentes communes dans tous les systèmes de cercles. On voit dès lors que ces dernières, dans deux systèmes quelconques, seront respectivement égales comme côtés opposés d'un rectangle. Quant aux angles embrassés, ils seront aussi invariables, et, par suite, leurs arcs $R\alpha$ et $r\alpha$ auront une somme fixe $(R+r)\alpha$, car les deux facteurs sont constants. Le périmètre entier de la courroie reste donc toujours le même, comme il fallait le démontrer.

CHAPITRE XIV.

EMBRAYAGES.

§ I.

EMBRAYAGES RECTILIGNES.

219. Nous comprenons sous la dénomination d'*embrayages* les appareils accessoires destinés à produire à la volonté du mécanicien une modification brusque dans la marche d'une machine (XXVI).

On peut, par leur moyen, changer la grandeur ou le sens de la vitesse, et en particulier effectuer la mise en marche ou l'arrêt de l'appareil.

Nous distinguerons d'abord deux sortes d'embrayages, suivant que la modification reste à la volonté du mécanicien ou qu'elle est effectuée par la machine elle-même à des instants déterminés. Une troisième catégorie comprendra les embrayages qui permettent la marche dans un sens en entravant complétement la marche rétrograde, et qu'on appelle *encliquetages*.

PREMIÈRE CATÉGORIE. — *Embrayages.*

DEUXIÈME CATÉGORIE. — *Déclics.*

TROISIÈME CATÉGORIE. — *Encliquetages.*

EMBRAYAGES. — Les embrayages ordinaires sont des ap-

pareils de natures très-diverses que nous pourrons néanmoins rattacher aux quatre types suivants :

PREMIER GENRE. — *Embrayages rectilignes.*

DEUXIÈME GENRE. — *Embrayages par soulèvement.*

TROISIÈME GENRE. — *Manchons d'embrayage.*

QUATRIÈME GENRE. — *Courroies d'embrayage.*

220. EMBRAYAGES RECTILIGNES. — *Barres d'excentrique.* — Le problème du changement de marche dans une locomotive revient au renversement de la vapeur dans le cylindre; car si l'on place alternativement sur chacune des faces du piston, dans une position donnée, le vide du condenseur ou la pression de la vapeur, il se déplacera d'un côté ou de l'autre, et avec lui tout le train dont il détermine le mouvement. Il faut donc faire en sorte que le tiroir de distribution se meuve dans un sens ou dans l'autre pour que les lumières qu'il démasque par ce mouvement se trouvent en communication avec la boîte à vapeur ou avec le condenseur. Or le tiroir est manœuvré par un excentrique circulaire à collier, ce qui revient, comme nous l'avons vu, au point de vue géométrique (165), au système d'une bielle et d'une manivelle qui aurait pour bras l'excentricité. Il faut donc que cette dernière se trouve successivement au-dessus et au-dessous de l'arbre tournant, pour que la vitesse acquise de rotation de ce dernier manœuvre l'extrémité du bras d'un côté ou de l'autre. L'impossibilité de décaler et de recaler ainsi à chaque instant l'excentrique pendant le mouvement conduit à en disposer deux à l'avance avec des excentricités diamétralement opposées (1), et le problème

(1) En réalité, les excentricités, au lieu d'être à 180 degrés l'une de l'autre, forment un angle obtus, comme on le voit sur les *fig.* 187 et 188 (*Pl. XII*). Cette modification porte le nom d'*avance angulaire*; elle est nécessitée par l'emploi du tiroir à recouvrement, dont l'explication exigerait des détails tout à fait étrangers à notre sujet actuel.

revient alors à établir la communication de l'arbre et du tiroir successivement par l'un ou par l'autre de ces excentriques.

Le moyen le plus anciennement employé pour cela consiste dans l'emploi des *barres d'excentrique* (*Pl. XII, fig.* 187). Les deux bielles se terminent alors par une selle que l'on met à cheval sur le bouton de la tige du tiroir; les becs disposés de chaque côté de ces selles font l'office d'entonnoir pour diriger avec sûreté le bouton dans l'encoche pendant le relèvement ou l'abaissement du système. Cette manœuvre s'effectue au moyen d'un *levier de relevage*, et de la barre qui réunit les deux bielles. Au moyen de ce dispositif, le bouton n'est jamais mené que par un excentrique, l'autre cessant alors de contribuer à la transmission.

221. *Coulisse de Stephenson.* — Un moyen de beaucoup préférable consiste à remplacer la tige de réunion des deux bielles par une pièce à coulisse qui réunit les deux selles, et dans laquelle est engagé, de manière à n'en pouvoir sortir, le bouton de la tige du tiroir (*Pl. XII, fig.* 188).

Par là, d'abord on supprime radicalement le danger de manquer le bouton, malgré les fourches, pendant le relevage.

On réalise en même temps un avantage important. On n'est plus, en effet, forcé de placer le bouton dans chaque selle; auquel cas il n'est mené que par un excentrique, sans que l'autre concoure à la transmission. On peut encore le mettre au milieu de la coulisse; dans ce cas, le tiroir qui participera également, en raison de la symétrie, aux deux mouvements contraires des excentriques restera en repos dans une position moyenne, ce qui supprime le jeu de la vapeur. On peut enfin le mettre dans une série de positions intermédiaires qui, le faisant participer plus ou

moins aux mouvements de chacun des excentriques, feront varier sa course depuis zéro, pour la position moyenne, jusqu'au maximum que l'on obtient aux extrémités. Et cette variation de la course est d'une grande importance, car elle modifie le temps de l'ouverture et de la fermeture des lumières, c'est-à-dire la détente de la vapeur, et, par suite, la force en chevaux de la machine.

222. Le dispositif, tel qu'il vient d'être décrit, présente un inconvénient assez réel. Si nous supposons, pour plus de clarté, l'arbre au repos, et que nous effectuions seulement le relevage, ce mouvement imprimera évidemment au bouton un déplacement et produira, par suite, un dérangement dans sa position moyenne et dans la distribution qui en dépend.

Pour éviter ce déplacement, on a proposé de briser la tige du tiroir et de faire agir le système de relevage sur la pièce articulée qui le termine (*Pl. XII, fig.* 189). De plus, la coulisse a alors la forme d'un cercle dont le centre se trouve sur l'articulation même. De cette manière, le relevage de cette pièce s'opère par un mouvement de rotation sans déplacer son centre, ni le tiroir qui lui est relié. Ce dispositif est connu sous le nom de *coulisse renversée*. Il a en revanche l'inconvénient de donner au système un assez grand développement en longueur.

223. Le mouvement de la coulisse est excessivement compliqué. Il a été l'objet d'une étude très-approfondie de la part de M. Phillips. Je lui emprunterai une construction fort élégante du centre instantané (*Pl. III, fig.* 47).

Nous savons que ce centre se trouve sur les normales aux trajectoires des différents points (VIII). Une première normale sera la bielle de relevage KH. Car le système de relevage étant une fois fixé dans une position quelconque, cette bielle oscille autour de son extrémité K. Un quelconque de

ses points, par exemple l'articulation H, qui la réunit à la coulisse, décrit donc un cercle autour de K et HK est la normale de ce point de la coulisse.

Pour achever de déterminer la position Ω du centre instantané sur la bielle de relevage, je supposerai le problème résolu. Si α est la rotation élémentaire de la coulisse autour de Ω, le déplacement linéaire de son extrémité B aura pour valeur $\Omega B.\alpha$, et sa direction sera normale à ΩB. Le centre instantané ω de la bielle d'excentrique AB se trouve dès lors sur ΩB et sa rotation élémentaire est exprimée par

$$\frac{\Omega B.\alpha}{\omega B}.$$

L'autre extrémité A de cette bielle éprouvera dès lors un déplacement linéaire

$$\frac{\Omega B.\alpha}{\omega B}.\omega A,$$

normalement à ωA; mais ce déplacement doit être aussi normal à OA, puisque ce point d'attache participe à la rotation de l'arbre tournant. Ainsi ωA est le prolongement de OA, et la rotation de l'arbre tournant aura pour valeur

$$\frac{\Omega B.\omega A.\alpha}{\omega B}.\frac{1}{OA}.$$

Pour simplifier cette expression, menons par le centre instantané Ω de la coulisse les parallèles ΩC, $\Omega C'$ aux excentricités OA, OA', les triangles semblables ΩBC, ωBA donneront la proportion

$$\frac{\Omega C}{\Omega B}=\frac{\omega A}{\omega B},$$

$$\frac{\Omega B.\omega A}{\omega B}=\Omega C.$$

Par là la rotation élémentaire de l'arbre tournant O devient

simplement

$$\frac{\Omega C}{OA} \cdot \alpha.$$

Mais, en raisonnant de la même manière pour l'autre moitié de l'appareil, nous la mettrons également sous la forme

$$\frac{\Omega C'}{OA'} \cdot \alpha.$$

On a donc, en égalant ces deux expressions,

$$\frac{\Omega C}{OA} = \frac{\Omega C'}{OA'},$$

ce qui montre que nous avons trois points en ligne droite : O centre de l'arbre tournant, Ω centre instantané de la coulisse, et D point de concours des deux bielles d'excentrique.

De là la construction suivante : si l'on prolonge les bielles d'excentriques AB, A′B′ jusqu'à leur rencontre en D, et qu'on tire de ce point une droite DO par le centre de l'arbre tournant, elle coupera la bielle de relevage HK au centre instantané Ω de la coulisse.

Le rapport des vitesses de rotations instantanées de l'arbre tournant et de la coulisse admettant, comme nous l'avons vu, l'une ou l'autre des expressions

$$\frac{\Omega C}{OA}, \quad \frac{\Omega C'}{OA'},$$

dont les dénominateurs restent constants, on voit que ce rapport varie comme la distance du centre instantané à l'une quelconque des bielles d'excentrique comptée parallèlement à son excentricité.

§ II.

EMBRAYAGES PAR SOULÈVEMENT.

224. *Palier à soulèvement.* — Un moyen très-simple, en théorie, d'établir ou de supprimer la communication entre deux roues dentées consiste à supporter le pivot de l'une d'elles sur une crapaudine à vis, qui permet de l'élever ou de l'abaisser de manière à la mettre ou non en regard de l'autre (*Pl. XII, fig.* 190). En pratique, ce procédé est assez incommode et ne s'applique convenablement que dans le repos.

225. *Trains complémentaires.* — En partant de ce principe on peut indiquer un moyen de faire varier le rapport de transmission de plusieurs manières différentes. Il suffit pour cela de monter sur l'arbre fixe et sur celui qui est susceptible de glisser dans sa propre direction deux séries de roues dont les rayons soient complémentaires, de manière à leur permettre d'engrener ensemble.

Il faut alors établir entre ces roues des intervalles convenables pour qu'une seule paire se trouve à la fois en prise. La *fig.* 48, *Pl. III,* représente cette disposition, sauf un jeu qu'il est toujours nécessaire de laisser dans la pratique. Les intervalles sont égaux, pour l'arbre mobile, à 0, 1, 2, 3,... largeurs de roue, et pour l'autre à 1, 2, 3, 4,.... largeurs. Un déplacement d'une largeur désunira la première paire, réunira la seconde, et ne rejoindra pas encore la troisième ni les suivantes. Un déplacement de deux largeurs désunira la première paire, dépassera le but pour la seconde, rejoindra la troisième, et ne suffira pas encore pour la quatrième et les suivantes; et ainsi de suite.

Si l'on désigne par n le nombre des roues de chaque

arbre, l leur largeur commune, L la longueur de l'arbre inférieur, et L′ celle de l'arbre supérieur, on aura

$$\begin{aligned} L &= nl + [1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1)]\,l \\ &= \left[n + \frac{(n-1)\,n}{2}\right] l = \frac{n\,(n+1)}{2}\,l, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} L' &= nl + [1 + 2 + 3 + \ldots + (n-2)]\,l \\ &= \left[n + \frac{(n-2)\,(n-1)}{2}\right] l = \left[\frac{n\,(n-1)}{2} + 1\right] l, \end{aligned}$$

ce qui revient à ces formules très-simples :

$$\begin{aligned} L + L' &= (n^2 + 1)\,l, \\ L - L' &= (n-1)\,l. \end{aligned}$$

226. Quant à la méthode qui permettra de déterminer les rayons en vue d'une série donnée de rapports, je l'expliquerai, pour plus de clarté, sur un exemple; mais il sera facile d'en dégager le principe général.

Proposons-nous de réaliser la série

$$\frac{1}{1},\ \frac{2}{1},\ \frac{3}{1},\ \frac{4}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{4},$$

en nous imposant, pour plus de simplicité, la condition que le pas soit le même pour toutes les roues. La somme des rayons étant constante comme égale à la ligne des centres, il en est de même, en multipliant par 2π, de la somme des circonférences, et, en divisant par le pas, de la somme des modules. Mais les modules sont réciproquement proportionnels aux deux termes des fractions proposées (106). Cette somme constante des modules est donc un multiple de chacune des sommes des deux termes de fractions proposées, à savoir :

$$2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 5,\ 9.$$

Il convient, par suite, de la prendre égale à leur plus petit

commun multiple

$$2^2 . 3^2 . 5 = 180,$$

et il ne reste plus qu'à partager ce nombre en deux parties proportionnelles aux termes de chacune des fractions, ce qui fournit les modules

90,	120,	135,	144,	108,	100,
90,	60,	45,	36,	72,	80.

Si les rapports ne sont pas assignés, il convient, pour économiser les modèles de fonderie, de prendre deux séries identiques pour les deux arbres. On pourra dès lors se donner la moitié ou la moitié plus un des termes successifs, suivant que leur nombre total est pair ou impair, et les autres s'en déduiront par la condition que la somme des termes équidistants des extrêmes soit constante et égale à l'intervalle Δ des axes.

On pourra, par exemple, employer une progression arithmétique, puisque, dans cette sorte de série, la somme des termes équidistants des extrêmes est toujours la même (1). Les rayons seront alors

$$\frac{\Delta}{n+1}, \quad \frac{2\Delta}{n+1}, \ldots, \quad \frac{k\Delta}{n+1}, \ldots, \quad \frac{n\Delta}{n+1}.$$

$$\frac{n\Delta}{n+1}, \quad \frac{(n-1)\Delta}{n+1}, \ldots, \quad \frac{(n-k+1)\Delta}{n+1}, \ldots, \quad \frac{\Delta}{n+1}.$$

227. *Trains non complémentaires.* — On peut, à la vérité, pour réaliser des séries qui ne remplissent pas la condition précédente, renoncer à l'emploi des rayons complémentaires (*Pl. XII, fig.* 191). On a recours alors à un

(1) Mais on ne pourrait employer une progression géométrique, comme on l'a parfois avancé par mégarde. En effet, la somme et le produit des termes équidistants des extrêmes devraient être à la fois constants; ce qui est impossible.

mécanisme assez compliqué et un peu faible, qui est cependant employé par les tourneurs.

Les deux arbres sont fixes et portent des roues quelconques placées en regard les unes des autres. On établit la communication d'une paire quelconque en amenant dans son plan une roue auxiliaire, que l'on installe de manière à ce qu'elle soit tangente aux deux proposées. A cet effet, le palier de cette roue est porté par une pièce susceptible de s'élever dans une rainure rectiligne de manière à faire varier l'ordonnée du centre. Le montant dans lequel est pratiquée cette rainure peut lui-même glisser horizontalement dans une seconde coulisse, pour que l'on puisse disposer à volonté de l'abscisse. Enfin cette coulisse peut être transportée parallèlement à elle-même, afin de permettre d'amener la roue auxiliaire dans le plan des paires successives.

On prend encore, pour plus de simplicité, des séries identiques pour les deux arbres; et il devient possible, dans ces conditions, d'adopter comme la plus naturelle la progression géométrique

$$\begin{array}{cccccc} r, & \lambda r, & \lambda^2 r, \ldots, & \lambda^k r, \ldots, & \lambda^{n-1} r, \\ \lambda^{n-1} r, & \lambda^{n-2} r, & \lambda^{n-3} r, \ldots, & \lambda^{n-k-1} r, \ldots, & r, \end{array}$$

le rapport de transmission variant alors lui-même suivant une progression géométrique

$$\frac{\omega_k}{\omega'_k} = \frac{r'_k}{r_k} = \frac{\lambda^{n-k-1} r}{\lambda^k r} = \lambda^{n-1-2k}.$$

228. *Trains multiples.* — On obtiendrait un plus grand nombre de variations en laissant la roue intermédiaire dans un plan fixe, et y amenant successivement toutes celles des deux arbres, de manière que chacune des roues de l'un pût être mise en relation avec toutes celles de l'autre. Le nombre de combinaisons sera alors le produit

des deux modules, et l'on aura avantage à prendre ces derniers égaux pour obtenir, avec une quantité de roues donnée, le plus grand nombre possible de variations. On sait, en effet, que le produit de deux facteurs qui ont une somme fixe devient maximum lorsqu'ils sont égaux.

229. Mais on obtient une solution préférable en rentrant dans le dispositif précédent et en employant seulement un plus grand nombre d'arbres. On reliera pour cela les arbres proposés A_0 et A_p au moyen de $p-1$ arbres intermédiaires A_i, pour chacun desquels nous appellerons n_i le module ou le nombre de roues; $\sqrt{\mu_i}$ la raison de la progression des rayons; k_i le rang de la roue mise en communication avec l'arbre précédent, et enfin C_i un coefficient constant. On aura alors, en appliquant la formule précédente de chaque arbre au suivant,

$$\frac{\omega_0}{\omega_1} = C_1 \mu_1^{k_1},$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = C_2 \mu_2^{k_2},$$

$$\cdots\cdots\cdots,$$

$$\frac{\omega_{p-1}}{\omega_p} = C_p \mu_p^{k_p},$$

et, en multipliant et désignant, pour abréger, par C le coefficient constant,

$$\frac{\omega_0}{\omega_p} = C \mu_1^{k_1} \mu_2^{k_2} \ldots \mu_p^{k_p}.$$

Si nous faisons actuellement

$$\mu_2 = \mu_1^{n_1}$$

$$\mu_3 = \mu_2^{n_2} = \mu_1^{n_1 n_2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\mu_p = \mu_{p-1}^{n_{p-1}} = \mu_1^{n_1 n_2 n_3 \ldots n_{p-1}},$$

la formule deviendra

$$\frac{\omega_0}{\omega_p} = C\mu_1^{k_1 + n_1 k_2 + n_1 n_2 k_3 + \ldots + n_1 n_2 n_3 \ldots n_{p-1} k_p}.$$

On peut, d'après cela, en disposant convenablement de $k_1, k_2, \ldots, k_p$, obtenir la série des puissances de μ_1, c'est-à-dire une progression géométrique continue. Supposons, en effet, toutes les quantités k_i nulles, sauf celles dont nous allons disposer successivement. En faisant varier k_1 de zéro à $n_1 - 1$, on obtient les exposants consécutifs de zéro à $n_1 - 1$. Remettant k_1 à zéro et prenant $k_2 = 1$, on obtient n_1, et, si k_1 recommence à varier de zéro à $n_1 - 1$, on trouve successivement $n_1 + 1$, $n_1 + 2 \ldots$, jusqu'à $2n_1 - 1$. Remettant k_1 à zéro et prenant $k_1 = 2$, on a $2n_1$, et, si k_1 varie de nouveau, $2n_1 + 1$, $2n_1 + 2, \ldots$, jusqu'à $3n_1 - 1$. On remet alors k_1 à zéro avec $k_2 = 3$, et ainsi de suite. Quand on est arrivé à $k_2 = n_2 - 1$ avec $k_1 = n_1 - 1$, on a $n_1 n_2 - 1$. On remet alors k_1 et k_2 à zéro, et on prend $k_3 = 1$, ce qui donne $n_1 n_2$. En reproduisant intégralement toute la série de variations précédente, on sera conduit sans interruption à $2n_1 n_2 - 1$. Remettant k_1 et k_2 à zéro, et prenant $k_3 = 2$ on obtient $2n_1 n_2$, puis, avec une nouvelle série de variations, on atteint $3n_1 n_2 - 1$, et ainsi de suite indéfiniment. Le dernier nombre obtenu en faisant chacune des quantités k_i égale à $n_i - 1$ sera

$$n_1 n_2 n_3 \ldots n_p - 1.$$

Le nombre total de variations est donc

$$n_1 n_2 n_3 \ldots n_p,$$

car nous avons commencé par la puissance zéro.

Si, au contraire, on répartit le même nombres de roues

$$n_1 + n_2 + n_3 \ldots + n_p$$

en un seul train, nous avons vu que le nombre maximum

de variations que l'on puisse ainsi réaliser sera

$$\frac{1}{4}(n_1 + n_2 + n_3 \ldots + n_p)^2.$$

230. Si, en particulier, et pour plus de simplicité, on suppose que tous les arbres portent le même nombre n de roues, les raisons successives deviendront

$$\begin{aligned} \mu_2 &= \mu^n, \\ \mu_3 &= \mu^{n^2}, \\ \mu_4 &= \mu^{n^3}, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \mu_p &= \mu^{n^{p-1}}, \end{aligned}$$

le rapport de transmission

$$\frac{\omega_0}{\omega_p} = C\mu^{k_1 + nk_2 + n^2k_3 + n^3k_4 \ldots + n^{p-1}k_p},$$

le nombre total de variations

$$n^p,$$

et le maximum que l'on eût pu atteindre avec un train ordinaire

$$\left(\frac{np}{2}\right)^2.$$

Il suffit donc, pour qu'il y ait avantage dans l'emploi des trains multiples, c'est-à-dire pour que, à nombre égal de roues np, ils permettent un plus grand nombre de combinaisons, que l'on ait

$$n^p > \left(\frac{np}{2}\right)^2,$$

condition facile à remplir. On en tire, en effet,

$$n > \sqrt[p-2]{\frac{p^2}{4}}.$$

Si on prend d'abord $p = 1$ et 2, et qu'on fasse disparaître l'indétermination, on trouve les valeurs 4 et e, de sorte qu'il suffit de prendre $n = 5$ ou 3. A partir de là on rencontre encore plus de facilité, car la fonction est toujours décroissante. Pour le constater, il suffit d'envisager son logarithme

$$2\,\frac{\log p - \log 2}{p - 2},$$

et de montrer que sa dérivée

$$\frac{2}{(p-2)^2}\left(1 - \frac{2}{p} + \log\frac{2}{p}\right)$$

reste négative. Son dénominateur est en effet sans influence sur le signe, et quant au numérateur, nul (1) pour $p = 2$, il reste ensuite négatif comme étant lui-même décroissant, puisque sa propre dérivée

$$\frac{2 - p}{p^2}$$

reste essentiellement négative.

231. La solution la plus avantageuse sera évidemment celle qui, pour un nombre donné de variations

$$n^p = a$$

emploiera un nombre minimum de roues

$$np = \frac{n \log a}{\log n}.$$

Il faut, pour cela, poser l'équation

$$\log a\,\frac{\log n - 1}{(\log n)^2} = 0;$$

(1) Il ne s'ensuit pas un maximum, car le dénominateur est lui-même nul. En faisant disparaître l'indétermination, on trouve que la vraie valeur de cette dérivée est $-\frac{1}{4}$.

comme il est impossible de faire $n = 0$ ou $n = \infty$, on en tire

$$n = e = 2, 7, \ldots;$$

n devant d'ailleurs être entier, on prendra celui des nombres 2 et 3 pour lequel le quotient $\frac{n}{\log n}$ est le moindre

$$n = 3,$$

ce qui indique des arbres de trois roues très-convenables en pratique.

Si donc on emploie comme nombre d'arbres

$$p = 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \ldots,$$

c'est-à-dire comme nombre de roues

$$3p = 6, \quad 9, \quad 12, \quad 15, \ldots,$$

on obtiendra, comme nombre de variations

$$3^p = 9, \quad 27, \quad 81, \quad 243, \ldots,$$

au lieu du maximum qu'eût donné un train ordinaire

$$\frac{9}{4}p^2 = 9, \quad 20, \quad 36, \quad 56, \ldots,$$

en ne prenant, bien entendu, que le plus grand entier contenu dans la fraction $\frac{9}{4}p^2$.

§ III.

MANCHONS D'EMBRAYAGE.

232. Le principe de l'appareil destiné à mettre en communication deux arbres distincts consiste à y monter deux pièces, dont l'une est assemblée à *prisonnier*, c'est-à-dire par l'intermédiaire d'une languette qui l'oblige de tourne

avec l'arbre, mais qui lui laisse la latitude de se déplacer dans le sens de la longueur. De plus, ces deux pièces sont munies d'appendices ou griffes qui les font engrener ensemble quand on les rapproche. Lorsque les griffes sont ainsi en prise, les arbres se trouvent mis en communication, et rien ne les relie, au contraire, si la pièce mobile est écartée de l'autre.

Je décrirai successivement les manchons eux-mêmes, puis les moyens employés pour les déplacer, enfin les effets de changements de vitesses qu'ils permettent de réaliser.

233. *Manchons à griffes droites.* — Les griffes saillantes et leurs logements rentrants sont formés par des surfaces cylindriques qui s'emboîtent exactement (*Pl. XII, fig.* 192).

On ne peut alors embrayer facilement qu'au repos.

Manchons à griffes obliques. — Les griffes sont terminées par des surfaces biaises analogues à des vis (*Pl. XII, fig.* 193).

On n'a pas alors besoin de viser juste pour embrayer, et les griffes finissent toujours par atteindre le fond de leur logement. On peut donc embrayer pendant la marche comme dans le repos.

Cônes de friction. — Les manchons n'ont plus de griffes, et la communication n'est fondée que sur l'adhérence (5). La forme est celle de deux cônes, l'un creux, l'autre plein (*Pl. XII, fig.* 194).

On n'embraye alors facilement que pendant la marche, comme nous le reconnaîtrons plus tard (388).

234. *Pince d'embrayage.* — C'est le mode le plus ordinairement employé pour faire mouvoir le manchon (*Pl. XII, fig.* 195). Elle a la forme d'une fourche, et l'arbre passe entre ses branches. Celles-ci se terminent par deux appendices qui pénètrent dans la rainure circulaire

pratiquée sur le manchon. Elles ne s'opposent pas à la rotation de cette pièce, mais elles lui impriment une translation parallèle à l'axe lorsqu'on fait basculer la fourchette.

Débrayage à vis. — On manœuvre le manchon mobile à l'aide d'une vis prise dans un écrou fixe. Ce mode a l'inconvénient de la lenteur.

Débrayage brusque. — Lorsqu'on veut, au contraire, pouvoir opérer avec la plus grande rapidité en cas de danger, l'une des pièces présente des renflements sinueux et l'autre une surface plane (*Pl. XII, fig.* 196). Si l'on pousse brusquement un taquet, il s'insinue entre les deux pièces à l'instant où le rentrant se présente, et, comme sa présence s'oppose au passage du saillant, la pièce qui le porte est forcée de se déplacer dans le sens longitudinal.

Débrayage automoteur. — Le manchon mobile porte une rainure héliçoïdale (*Pl. XII, fig* 197). On dispose en outre, sur la partie fixe, une pièce à charnière que l'on fait basculer de manière que son bouton tombe dans la rainure. La forme de celle-ci provoque alors la translation comme conséquence de la rotation relative (57, II). On emploie ce mode quand le débrayage exige un effort considérable que l'on emprunte ainsi à la machine elle-même.

235. *Mise en marche; arrêt.* — L'effet le plus simple est la mise en marche ou l'arrêt. Il suffit, pour le produire, de monter les manchons sur deux bouts d'arbres placés en prolongement l'un de l'autre. Suivant que ces manchons sont ou non en prise, la transmission a lieu ou se trouve supprimée.

Variation du rapport des vitesses. — On emploie deux paires de roues complémentaires, mais différentes (*Pl. XII, fig.* 198). Elles sont calées sur l'un des arbres et folles sur

l'autre. Un manchon est installé dans l'intervalle des roues folles, de manière à se mettre en prise avec chacune d'elles lorsqu'on le transporte à droite ou à gauche. Dans chaque cas, l'une des roues folles se trouve calée temporairement et transmet la rotation à l'autre arbre avec un rapport de vitesses qui dépend des rayons primitifs.

Variation du sens des vitesses. — Sur un premier arbre sont montées librement deux roues d'angle que l'on cale alternativement au moyen du manchon installé entre elles (*Pl. XII, fig.* 199). Une autre roue d'angle montée sur un arbre perpendiculaire engrène avec toutes les deux. Il est clair que sa rotation changera de sens suivant qu'elle proviendra de l'arbre moteur par l'intermédiaire de l'une ou l'autre des deux premières roues. Cet organe présente une certaine importance en raison de son emploi dans les modérateurs (286).

§ IV.

COURROIES D'EMBRAYAGE.

236. Les courroies sans fin peuvent être employées pour l'embrayage suivant deux modes différents : les *courroies lâches* et le *transport des courroies.*

Courroies lâches. — Le premier système consiste à établir ou à supprimer à volonté la tension dans une courroie qui par elle-même est un peu trop longue (405).

Axe à soulèvement. — L'axe de l'une des roues peut être légèrement soulevé de manière à tendre les deux brins, qui redeviennent lâches quand l'axe retombe (*Pl. XIII, fig.* 200).

Tire-sac. — Il sert, dans les moulins, pour faire monter les sacs de grain à l'étage supérieur par la force du moteur.

Il consiste en un rouleau tenseur que l'on appuie contre l'un des brins de manière à tendre la courroie (*Pl. XIII, fig.* 201).

Poulies à expansion. — La jante d'une poulie est formée de pièces indépendantes réunies au moyeu par des rayons obliques (*Pl. XIII, fig.* 202). En agissant sur ce moyeu, on fait varier l'obliquité et l'on force ainsi les jantes à s'écarter ou à se rapprocher du centre. Elles dessinent dès lors un profil général d'un plus ou moins grand rayon qui tend ou détend la courroie.

Treuil à spirale. — On monte aux deux extrémités du treuil deux disques à rainures (*Pl. XIII, fig.* 203). Elles forment dans l'un des rayons équidistants, et dans l'autre une spirale d'Archimède. On réunit ces disques par des tiges dont l'ensemble constitue un prisme régulier qui approche d'un cylindre. Les rainures rectilignes permettent aux tiges de s'éloigner du centre, de manière à faire varier le rayon du cylindre et à tendre la courroie. Pour produire cet effet, il suffit de faire tourner sur lui-même le disque à spirale d'un certain angle. Tous les rayons vecteurs augmentent alors d'une même quantité, ce qui force les tiges à s'éloigner également du centre sans cesser de former par leur ensemble un cylindre de révolution.

237. TRANSPORT DES COURROIES. — Le second mode consiste à faire passer la courroie d'une poulie sur une autre, ce qui permet de faire varier à volonté son action sur le mécanisme. On emploie pour cela une *fourche d'embrayage,* entre les branches de laquelle est engagée la courroie (*Pl. XIII, fig.* 204). Il suffira de faire basculer la fourchette pour la transporter de sa poulie sur la poulie voisine. Il est nécessaire pour cela d'agir sur le brin qui arrive et non sur celui qui quitte la poulie.

Mise en marche, arrêt. — On dispose sur un arbre deux

poulies calées, et en regard, sur un second, une poulie folle et une calée. La communication du premier arbre aux poulies de l'autre aura toujours lieu, mais elle ne se transmettra à cet arbre lui-même que quand elle s'effectuera par l'intermédiaire de la roue calée.

Il y a avantage à monter la roue folle sur l'arbre moteur plutôt que sur l'autre, car, après le débrayage, la courroie devient alors immobile, et l'on évite une usure et un danger inutiles.

Variation du sens des vitesses. — On dispose sur un arbre (*Pl. XIII, fig.* 205) une poulie A et une roue d'angle P, sur un manchon concentrique, fou sur l'arbre, une poulie B et une roue d'angle Q. Enfin les roues P et Q sont mises en communication par une autre R montée sur le second arbre. En faisant passer la courroie de A sur B, on transmettra la rotation à la roue R par l'intermédiaire de P ou de Q, c'est-à-dire dans deux sens contraires.

Variation du rapport des vitesses. — Un premier moyen consiste dans l'emploi d'*arbres creux* ou manchons fous les uns sur les autres (*Pl. XIII, fig.* 206). On y monte à une extrémité des poulies égales A, B, C,..., et à l'autre des roues inégales P, Q, R,..., engrenant avec d'autres P′, Q′, R′,..., calées sur le second arbre. En faisant passer la courroie sur A, B, C,... successivement, on transmet ainsi le mouvement avec des rapports de rayons variables $\frac{p}{p'}$, $\frac{q}{q'}$, $\frac{r}{r'}$, ...

Un second moyen consiste dans l'emploi de *fusées complémentaires* (*Pl. XIII, fig.* 207) : ce sont des systèmes de poulies accolées sur chaque arbre, et dont les rayons décroissent en progression arithmétique. Les deux fusées sont pareilles, mais disposées inversement. De cette ma-

nière, les rayons correspondants ont toujours la même somme, et nous savons que cela suffit (218) pour que la courroie se trouve tendue sur toutes les paires de roues, lorsqu'on l'y dispose suivant les tangentes intérieures.

Un troisième moyen consiste dans l'emploi de *cônes complémentaires,* c'est-à-dire de deux cônes égaux, mais disposés inversement. De cette manière, la somme des rayons placés en regard reste encore constante, et l'on obtient une variation continue.

On pourrait employer de même des *fusées* dessinées par un profil quelconque, mais le même pour les deux (218). Mais ces dispositifs auraient peu d'intérêt, car il est sans importance d'être obligé de déplacer plus ou moins la courroie pour obtenir le rapport voulu des rayons.

CHAPITRE XV.

DÉCLICS ET ENCLIQUETAGES.

§ I.

DÉCLANCHEMENTS.

238. Les déclics sont des embrayages qui, au lieu de fonctionner sous la main du mécanicien et à sa volonté, opèrent d'eux-mêmes des changements de marche à des instants déterminés et périodiques. Nous en distinguerons deux genres :

PREMIER GENRE.— *Déclanchements.*

SECOND GENRE. — *Arbres à cames.*

DÉCLANCHEMENTS.— Le principe des *arrêts* mérite à peine ce nom à cause de sa simplicité, mais il est d'autant plus digne de remarque pour l'application. Il consiste à installer sur une pièce mobile un taquet qui, arrivant à l'instant convenable sur l'organe de débrayage, le manœuvre comme ferait la main de l'ouvrier.

On peut aussi inversement installer sur une pièce mobile un appareil de débrayage ordinaire qui viendra à l'instant voulu rencontrer un obstacle fixe.

Lorsque l'on a besoin de faire varier l'instant du changement, on peut s'y prendre de deux manières : en premier lieu, ménager pour le taquet mobile une série de trous sur la tige à laquelle on l'adapte ; ou mieux encore, assembler

la pièce qui le porte à l'aide d'un écrou mobile sur la tige filetée en vis.

On peut aussi inversement employer un obstacle fixe, mais variable à volonté. Ce moyen est évidemment préférable, car il est plus commode d'agir sur une pièce fixe que sur un corps en mouvement. Dans le tiroir Farcot, par exemple (*Pl. XIII, fig.* 208), on se sert d'une came d'arrêt de forme curviligne que l'on fait tourner autour d'un point situé sur la direction de la tige. L'instant de la rencontre varie dès lors avec la longueur de celui des rayons vecteurs que l'on place dans la direction de la tige.

Si l'on veut de plus faire varier, non pas l'instant de l'arrêt, mais le fait même de l'arrêt ou du libre passage, on introduit un butoir en translation qui présente alternativement des pleins et des vides. C'est le principe employé dans le métier Jacquart. L'arrêt ou *liseuse* est un carton percé de files parallèles de trous. Un peigne de petits pistons mobiles vient le frapper périodiquement; les uns passent au travers des trous et les autres sont arrêtés par les pleins. A chaque coup du peigne, le carton s'est déplacé de l'intervalle de deux files et la combinaison change. On peut ainsi faire varier à volonté le dessin dans le tissage.

Indiquons par quelques exemples le parti que l'on peut tirer de ces principes pour la construction des déclanchements.

239. *Déclic à bascule.* — Il comprend en premier lieu un taquet moteur A qui tourne constamment dans le sens de la flèche (*Pl. XIII, fig.* 209). Son mouvement se communique au loquet B, qui reçoit sur un cran *b* la pression de A et est maintenu contre lui par un ressort C d'ailleurs sans énergie. Le système tournant vient à un certain instant buter contre l'obstacle D. Le loquet ainsi sollicité à l'arrière de sa charnière se soulève et ne subit plus l'action

de A. Dès lors la résistance P ramène rapidement en arrière la roue E. Le loquet quitte donc l'obstacle D; le ressort C le remet en position; puis, dans la suite de la rotation, le taquet A s'engage de nouveau dans le cran *b*, et tout recommence.

240. *Déclic de la cataracte.* — Dans la machine à vapeur de Cornouailles on se sert, pour opérer très-rapidement l'ouverture des soupapes, du système suivant (*Pl. XIII, fig.* 210). Une tige A est remontée par la cataracte régulatrice (258). Elle vient au moment voulu soulever, par un de ses taquets, le levier B. Le secteur C, n'étant plus alors maintenu par le cran *b*, bascule rapidement sous l'influence du poids P, et ce mouvement se communique à la soupape qui se trouve soulevée de son siége. Pour la refermer et réamorcer le déclic, on se sert d'une poutrelle D, qui, en descendant par le jeu de la machine, rencontre l'appendice *c* du secteur qui se trouve alors à peu près horizontal, et qu'elle remet dans sa position verticale, en fermant la soupape. Lorsqu'ensuite la tige A s'est abaissée suffisamment, le levier B retombe, et, la poutrelle pouvant alors remonter sans inconvénient, tout le système se retrouve dans l'état initial.

241. *Sonnette du mouton.* — Pour battre les pilotis, on emploie un corps lourd appelé *mouton,* qu'on élève jusqu'à une certaine hauteur pour le laisser alors retomber par son poids. L'organe qui opère ce déclanchement est la *sonnette* (*Pl. XIII, fig.* 211). Il renferme une espèce de paire de ciseaux qu'un ressort en cœur écarte à la partie supérieure, de manière à resserrer les branches inférieures pour saisir le bouton de la tige du mouton. A un certain instant de l'élévation, la partie supérieure des ciseaux s'engage dans un vide pratiqué dans un bâti fixe et trop étroit pour elle. La force du ressort est facilement surmontée, les

branches se rapprochent vers le haut, s'écartent dans le bas, et le mouton retombe.

242. *Parachute Fontaine.* — Pour prévenir la chute des bennes dans les puits de mine en cas de rupture du câble, on les relie à ce dernier par l'intermédiaire d'un ressort qui, dans l'état naturel, présente une largeur plus grande que lorsqu'il subit l'action du poids soulevé (*Pl. XIII, fig.* 212). D'après cela, les pointes dont il est armé peuvent passer dans le cuvelage du puits tant que la benne reste suspendue; mais si elle devient libre dans l'espace par suite d'une rupture de câble, le ressort reprend sa largeur trop grande, et les pointes se piquant dans les boiseries, la benne reste suspendue dans le puits.

§ II.

ARBRES A CAMES.

243. Un autre moyen fort simple, pour obtenir un changement spontané de mouvement, consiste à employer un profil en rapport avec la transmission que l'on veut réaliser et pendant l'intervalle pour lequel on veut la réaliser, puis à supprimer ce profil à partir du point où la transmission doit cesser.

Ce principe fournit les *arbres à cames* employés d'ordinaire à soulever un corps pesant jusqu'à l'extrémité des profils, après quoi la pesanteur ramène ce corps jusqu'à ce qu'un nouvel appendice recommence le même office. Il peut, du reste, se présenter trois cas suivant la nature des mouvements transmis.

Deux translations. — Cette combinaison se rencontre dans le *coin de soulèvement* ou *plan incliné,* et la *crémaillère à rochet,* que l'on dispose parfois en *crémaillère*

circulaire à rochet, pour obtenir un mouvement progressif (*Pl. XIII, fig.* 213).

Le mouvement relatif de la tige par rapport au coin est un glissement sur la pente de ce dernier. On sait qu'il s'obtiendra par la composition des deux translations, après avoir changé le sens de l'une d'elles (XXI). Or, deux translations se composent par leur parallélogramme (XIV), qui sera ici rectangle. Si donc i désigne l'angle du coin, on aura, pour le rapport des vitesses de transmission,

$$\frac{v}{v'} = \text{tang}\, i,$$

et pour la vitesse de glissement

$$V = \sqrt{v^2 + v'^2} = \frac{v}{\sin i}.$$

244. *Translation et rotation.* — Cette combinaison se présente dans les *pilons de bocards.*

La transmission ne différant pas au fond d'une crémaillère, il suffit de trouver les éléments de cette dernière à chaque instant (*Pl. III, fig.* 50). On sait pour cela que la normale commune TN passe par le point de contact du cercle et de la droite primitive (75). De plus, le rayon de ce point de contact, étant perpendiculaire à la tangente, s'obtiendra en menant ON normalement à la translation. Ce point de contact est donc N. Mais il y a roulement entre le cercle et la droite primitifs, c'est-à-dire vitesse commune en N. On a par conséquent

$$v = \omega . \text{ON}.$$

Ainsi, le rapport des vitesses de translation et de rotation est marqué par la distance du centre de rotation à la normale commune comptée perpendiculairement à la translation.

Comme, du reste, le centre instantané du mouvement

relatif est en N, la vitesse de glissement, c'est-à-dire celle du point de contact T, sera (VIII)

$$V = \omega . NT.$$

245. *Deux rotations.* — Cette combinaison se présente dans les *marteaux frontaux, allemands,* ou *à bascule,* ainsi que dans la *cisaille* et dans la *presse à excentrique circulaire* (*Pl. III, fig.* 36).

Comme la transmission ne diffère pas au fond de celle d'un engrenage (83), il nous suffira encore d'en trouver les rayons primitifs (*Pl. III, fig.* 50). Or, la normale commune TN passe (75) par le point de contact des cercles primitifs, et, comme ce point est également situé sur la ligne des centres OO′, il se trouvera en N. Les rayons seront ON, ON′, et l'on aura (3)

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{O'N}{ON}.$$

Les vitesses angulaires sont ainsi en raison inverse des segments interceptés sur la ligne des centres par la normale commune. On peut ajouter que les rotations sont de mêmes sens ou de sens opposés, suivant que cette intersection se trouve en dehors ou en dedans de l'intervalle des centres.

Comme d'ailleurs le centre instantané du mouvement relatif se trouve en N, et que la vitesse angulaire de ce mouvement est $\omega \pm \omega'$ (XVI), on aura, pour la vitesse de glissement qui est celle du point T,

$$V = (\omega \pm \omega')NT.$$

§ III.

ENCLIQUETAGES.

246. Les *encliquetages* sont des embrayages dont l'action s'exerce d'elle-même et incessamment pour prévenir

tout retour en arrière, en permettant le mouvement en avant.

Les pièces de machines sont toujours des systèmes à liaison complète, attendu qu'en raison des guides la direction de chaque point se trouve déterminée. Pour les pièces munies d'encliquetages, la restriction devient encore plus particulière, et un seul sens de mouvement reste possible sur cette direction.

Nous distinguerons deux genres d'encliquetages.

PREMIER GENRE.— *Encliquetages à rochet.*

SECOND GENRE.— *Encliquetages par arc-boutement.*

Les premiers emploient un *rochet,* ou roue à dents aiguës, qu'il faut bien se garder de confondre avec des roues d'engrenage. Un *doigt* ou *pied-de-biche* joue autour d'une charnière fixe et vient engager son extrémité dans l'angle de deux dents. Par là, il empêche la roue de tourner de son côté, mais il ne s'oppose pas au mouvement en sens contraire.

Ces encliquetages présentent le défaut du *temps perdu* que la roue emploie à revenir en arrière, jusqu'à ce que le doigt, abandonné en un point quelconque de la surface d'une dent, en ait atteint le fond. L'inconvénient ne réside pas, bien entendu, dans la valeur industrielle de ce temps perdu ; il consiste en ce que le mécanisme peut, sous l'influence de forces intenses, acquérir dans ce petit espace une force vive sensible et capable d'amener un choc désastreux pour le pied-de-biche.

Ce défaut n'existe plus pour les encliquetages fondés sur l'arc-boutement. On appelle ainsi une propriété du frottement qui apporte dans certaines circonstances une entrave absolue au mouvement. Nous ne pourrons étudier convenablement ce second genre que lorsque nous aurons exposé

les lois du frottement (371). Je me contenterai de décrire ici les encliquetages à rochet.

247. ROCHETS.—J'indiquerai d'abord les rochets à simple effet, c'est-à-dire ceux qui ne transmettent de mouvement que pour un seul des deux sens qu'ils peuvent prendre eux-mêmes.

Clef Bréguet. — La clef de montre de Bréguet renferme un encliquetage au moyen duquel la main, en tournant alternativement dans les deux sens, ne fait marcher le remontage que d'un seul côté (*Pl. XIII, fig.* 214).

Levier d'encliquetage. — Pour élever les pierres de taille dans les sapines aux abords des grandes constructions (*Pl. XIII, fig.* 215), on emploie un treuil; et pour soulager les hommes, en les dispensant de maintenir incessamment le poids à la hauteur gagnée par leurs efforts successifs, on y adapte un encliquetage à deux pieds-de-biche. L'un A communique le mouvement descendant du levier, au rochet; l'autre B empêche le retour du rochet quand on relève la barre.

Remontage des chronomètres. — Un chronomètre se compose essentiellement d'un ressort moteur et d'un ensemble de rouages qu'on appelle le *mouvement.* Le ressort, en se débandant, entraîne le mouvement dans un sens. Il semble donc qu'en le remontant on ramènera les rouages en sens contraire. On évite cette difficulté par l'emploi d'un encliquetage (*Pl. XIV, fig.* 216).

Le ressort ou son carrelet A est lié à un rochet B, et celui-ci commande, à l'aide des doigts C, C′, la première roue D du mécanisme. Si l'on remonte A en sens contraire, le rochet B le suit, mais le doigt C n'est plus entraîné, et les moindres résistances, ou si l'on veut un doigt inverse, maintiennent le mécanisme B′, C′, D.

Il reste cependant une difficulté relative au temps perdu par cette opération, pendant lequel le mécanisme n'est plus en relation avec le moteur, ce qui occasionnerait une erreur importante dans les indications de l'appareil. On la lève par l'introduction d'un second encliquetage et du ressort d'entretien.

Le rochet B′ est fou sur l'arbre A. Le doigt C′, monté sur le rochet D, l'entraîne dans la marche normale; mais, à l'instant du remontage qui manœuvre B en sens contraire, le doigt C ne commande plus B′, qu'on peut aussi supposer maintenu par un doigt inverse. Or, B′ se trouve en relation avec D par l'intermédiaire du ressort d'entretien R, de sorte que cette roue D se trouve encore sollicitée par la tension du ressort à continuer sa marche.

Encliquetage muet. — Pour éviter le ferraillement dû au mouvement indépendant des doigts, sous l'action de ressorts ou de leur poids, on a proposé de les manœuvrer directement de la manière suivante (*Pl. XIV, fig.* 217).

Le levier A porte une tringle B qui dégage, quand on agit vers le haut, le doigt C autour de sa charnière *c*; puis rencontrant le taquet *d*, il agit sur le bras D et le fait tourner à gauche sans la roue. Ramenant le levier A vers le bas, on abaisse le doigt et on l'engage dans les dents. Le levier rencontre le taquet *d′*, pousse le bras D vers la droite et, par l'intermédiaire du doigt, la roue elle-même. De cette manière, il n'y a transmission que dans un sens, et le doigt moteur n'agit jamais par choc.

248. Dans les encliquetages à double effet, les deux sens du mouvement du moteur transmettent un même sens de déplacement au mécanisme.

Levier de La Garousse. — Le levier porte deux pieds-de-biche, et, dans chacune de ses oscillations, l'un de ces

doigts pousse le rochet à gauche, le second revenant librement vers la droite (*Pl. XIV, fig.* 218).

Enclique age à crémaillère. — C'est le même système dans lequel on remplace la rotation d'une roue par la translation d'une crémaillère à rochet (*Pl. XIV, fig.* 219).

CHAPITRE XVI.

RÉGULATEURS DE DESTRUCTION.

§ I.

GÉNÉRALITÉS.

249. Nous comprenons sous la dénomination de *régulateurs* les appareils accessoires destinés à mettre la marche d'une machine à l'abri des causes accidentelles de variation (XXVI).

On sait par le théorème du travail que l'accroissement de la demi-force vive est égal à la somme algébrique des travaux développés, moteurs ou résistants. Les variations accidentelles qui s'écartent de la marche normale proviennent donc de variations correspondantes du travail, de la part du récepteur ou de l'opérateur. On voit par là que c'est sur le travail lui-même qu'il faudra faire porter l'action régularisatrice pour influencer la marche de l'appareil.

Les régulateurs se rangeront, d'après cela, en trois catégories bien distinctes. Dans la première, ils détruisent en pure perte l'excédant nuisible de travail moteur en mettant en jeu une résistance passive. Outre l'inconvénient de laisser perdre ainsi une valeur industrielle telle que le travail, et celui de faire intervenir pour cela une influence qui est plus ou moins désorganisatrice pour la machine, ces

régulateurs présentent le défaut grave de ne remplir qu'à moitié le but auquel ils sont destinés. On peut en effet, par leur moyen, faire cesser une accélération anormale en atténuant le travail moteur, mais on ne saurait remédier à un ralentissement lorsque l'action motrice se trouve en déficit par rapport au travail résistant.

Les appareils de la seconde catégorie emmagasinent et mettent en réserve l'excédant de travail moteur, au lieu de le détruire purement et simplement. Dans les périodes d'accélération, on supprime ainsi l'effet en faisant disparaître momentanément sa cause; et aux époques de ralentissement, on supplée à la défaillance du moteur en empruntant, pour lui venir en aide, une partie du travail qui a été préalablement économisé. Il est inutile, d'après cela, d'insister sur la supériorité que ces régulateurs présentent en principe sur les précédents.

Les appareils de la troisième catégorie, que nous appellerons *modérateurs*, modifient la production du travail dans sa source même. Ils agissent sur le récepteur comme le ferait l'action intelligente d'un mécanicien continuellement attentif au jeu de la machine. Leur fonction est d'activer la production du travail moteur dans les phases de ralentissement et de la modérer en cas d'accélération.

Nous diviserons, d'après cela, de la manière suivante l'étude des régulateurs :

PREMIÈRE CATÉGORIE. — *Destruction du travail.*

DEUXIÈME CATÉGORIE. — *Emmagasinement du travail.*

TROISIÈME CATÉGORIE. — *Modération.*

250. DESTRUCTION DU TRAVAIL. — Les régulateurs qui procèdent par destruction du travail moteur, en faisant intervenir une résistance passive, se classeront d'après la

nature de cette résistance. Nous établirons ainsi les genres suivants :

PREMIER GENRE. — *Choc.* — *Échappements.*

DEUXIÈME GENRE. — *Frottement.* — *Freins.*

TROISIÈME GENRE. — *Étranglement des liquides.* — *Obturateurs.*

QUATRIÈME GENRE. — *Résistance des milieux.* — *Régulateurs aériens.*

§ II.

ÉCHAPPEMENTS.

251. Les échappements sont les appareils qui détruisent en pure perte le travail par l'intervention du choc. Ce phénomène doit être autant que possible banni des machines, car il tend rapidement à leur dislocation lorsque les efforts mis en jeu prennent quelque intensité. Aussi les appareils de ce genre ne sont-ils guère employés que pour l'horlogerie. En revanche, cet art a introduit un nombre considérable d'échappements dont la description suffit à former des traités spéciaux. Comme elle n'a d'ailleurs avec l'étude des machines qu'une relation éloignée, je me contenterai de décrire ici ceux de ces organes qui sont le plus employés.

Le problème de l'horlogerie consiste à produire un mouvement uniforme ou, plus exactement, un mouvement périodique, avec un cycle suffisamment restreint pour que la succession des phases semblables puisse servir à la mesure du temps. Il faut, bien entendu, pour cela un moteur, qui est toujours un ressort ou un poids. Mais comme le mouvement qu'il produit est nécessairement varié, on introduit dans le mécanisme un balancier isochrone sous forme de pendule ou de spiral. Cet organe manœuvre l'é-

chappement, c'est-à-dire une pièce qui vient s'interposer à des intervalles égaux dans le mécanisme, et qui le réduit à chaque instant au repos pour le laisser chaque fois repartir sous l'action du moteur. On obtient de cette manière la périodicité voulue.

On distingue d'après cela les échappements suivant qu'ils sont à repos ou à recul, c'est-à-dire que leur interposition arrête simplement la marche du mécanisme ou le ramène légèrement en arrière. Il semble que le premier mode doive être préférable ; cependant beaucoup d'artistes ont employé les échappements à recul.

252. *Échappement à ancre.* — L'échappement de Graham (*Pl. XIV, fig.* 220), employé dans les horloges fixes, se compose essentiellement d'une roue à rochet manœuvrée par le moteur et d'une pièce qui présente une analogie éloignée avec une ancre, et qui participe aux oscillations du balancier. On la relie à ce dernier au moyen d'une tige qui passe entre les branches d'une fourchette portée par le balancier. Ce mode de connexion présente, en effet, l'avantage de diminuer les frottements.

Le rochet a une tendance constante à s'avancer dans le même sens, mais il est arrêté par l'enchevêtrement des deux pattes de l'ancre. Celles-ci sont profilées par des arcs de cercle décrits autour du centre d'oscillation pour que l'échappement soit à repos, car toute autre courbe provoquerait un recul ou laisserait avancer le rochet. Ce centre d'oscillation se trouve d'ailleurs placé à l'intersection des tangentes menées à la circonférence du rochet par les points où la rencontrent les arcs de cercle précédents. De cette manière, l'action du rochet, tangentielle à sa circonférence, s'exerce normalement au profil de l'ancre.

Quant à l'épaisseur des pattes de l'ancre, elle doit être, sauf un léger jeu, la moitié du pas du rochet. Dans ces

conditions, l'oscillation double laisse passer une dent. Si donc le pendule bat la seconde et que le rochet doive tourner en une minute, il faudra lui donner trente dents, ce qui se fera avec la règle et le compas en inscrivant le pentédécagone régulier.

On remarquera les fuyants ou plans inclinés qui tronquent les extrémités des pattes. Leur but est de permettre, pendant une faible partie de l'oscillation de l'ancre, une action oblique du rochet, c'est-à-dire une impulsion du moteur sur le pendule pour restituer à celui-ci la force vive qu'il perdrait peu à peu s'il ne recevait aucune action motrice. On dispose les fuyants suivant les tangentes d'un même cercle concentrique à l'ancre, pour que les bras de levier des forces d'impulsion soient les mêmes. L'usage est d'ailleurs de leur laisser sous-tendre, par rapport au centre d'oscillation, des angles de 2 à 3 degrés seulement.

253. *Échappement à cylindre.* — L'échappement à cylindre employé dans les montres de poche se déduit du précédent en supposant que l'ancre n'embrasse qu'une seule dent (*Pl. XIV*, *fig.* 221 et 222). Il est lui-même à repos, car le cylindre est circulaire. Son centre est encore placé à l'intersection des deux tangentes du rochet. Quant aux plans inclinés, ils sont portés par les dents et non plus par la pièce oscillante, ce qui revient du reste au même. Ajoutons enfin que l'oscillation a une beaucoup plus grande amplitude que dans l'échappement à ancre : elle atteint 350 degrés.

254. *Échappement à chevilles.* — Il se compose d'une sorte de roue à lanterne et d'une pièce oscillante dont le plan est antérieur, mais dont les pattes s'enchevêtrent successivement entre les chevilles de la roue (*Pl. XIV*, *fig.* 223). Ces pattes sont encore formées par des arcs de cercle décrits autour du centre d'oscillation pour que l'échappement soit à repos. Ce système, très-rapproché de

celui de Graham, en diffère surtout en ce que le choc se fait sentir sur la pièce oscillante toujours dans le même sens, et non alternativement d'un côté et de l'autre, ce qui tend à déchausser les axes.

255. *Échappement libre.*—Ce système, employé dans les chronomètres de précision, présente sur les autres un avantage important. Dans les appareils précédents, la communication subsiste pendant l'arrêt entre la roue de marche et le balancier, de telle sorte que, même avec les échappements à repos, les irrégularités du moteur peuvent se faire sentir au balancier et altérer son isochronisme. Plusieurs artistes, parmi lesquels on doit citer Dutertre, Harenschaw, Arnold et Pierre Leroy, ont travaillé à supprimer cette communication et y sont parvenus dans l'échappement libre (*Pl. XIV, fig.* 224).

Le moteur imprime à la roue A une rotation continue, et le balancier au taquet B une oscillation alternative qui atteint 45o degrés. Entre les deux se trouve un système de ressorts formé d'un premier assez fort C et d'un autre D très-faible quand on l'abaisse, et que toute sa longueur *pq* peut fléchir, mais suffisamment rigide quand on l'élève et que *pr* seulement entre en jeu pour soulever le premier ressort C à l'aide d'un petit cran perpendiculaire au plan de la figure.

Dans ces conditions, lorsque B oscille de bas en haut, il élève les ressorts, et le rochet entre en mouvement. Dans l'oscillation contraire, B passe librement, car le ressort D est sans force dans ce sens. A chaque fois que le cran α laisse passer une dent, l'une des suivantes vient heurter légèrement le cran β pour restituer de la force vive au taquet. Sauf cette action très-courte, on voit que le moteur et le balancier restent sans communication pendant toute la période d'arrêt.

§ III.

FREINS.

256. Les freins sont les appareils qui détruisent en pure perte le travail par l'intervention du frottement. Il suffit, pour constituer un frein, de mettre en contact, avec une certaine pression mutuelle, un corps mobile avec un corps fixe ou, plus généralement, avec un autre corps doué par rapport à lui d'un mouvement relatif (385).

Le *sabot* des voitures (*Pl. XIV, fig.* 225) supprime le roulement d'une roue et le remplace par un glissement sur le sol (382).

Le *frein Laignel*, proposé pour les chemins de fer, supprime le roulement des roues en soulevant le wagon sur des patins qui glissent sur le rail (*Pl. XIV, fig.* 226).

Le *frein des moulins à vent* est formé d'une pièce de bois fixe que l'on appuie à volonté contre la jante d'une grande roue tournant avec le mécanisme.

Le *frein flexible* se compose d'une bande fixe de tôle que l'on applique à la circonférence du volant et que l'on serre au moyen d'un levier (*Pl. XIV, fig.* 227). Ce frein est d'une grand puissance, et nous en verrons plus loin la théorie détaillée (402).

257. La *manivelle des voitures* met en contact avec la jante tournante de la roue une pièce qui ne participe qu'à la translation du châssis, d'où résulte un glissement relatif des deux parties (*Pl. XIV, fig.* 228).

Le *frein de chemin de fer* ne diffère du précédent qu'en ce que le même système est appliqué à toutes les roues du wagon porte-frein (*Pl. XIV, fig.* 229).

§ IV.

OBTURATEURS.

258. Les obturateurs sont les appareils qui détruisent en pure perte le travail par l'intervention de la résistance à l'écoulement d'un liquide créée par un étranglement (417).

Le *cône obturateur* est un cône plein, susceptible de s'emboîter dans un cône creux qui sert de buse d'écoulement. Si on le rapproche plus ou moins de l'orifice, il réduit en proportion la section d'écoulement. Ces cônes se rencontrent dans l'injecteur Giffard, dans les tuyères, les compteurs à gaz, etc.

La *cataracte* de la machine de Cornouailles est destinée à réglementer à volonté l'intervalle de l'ouverture des soupapes. A cet effet, la tringle qui manœuvre leur déclanchement (240) est munie d'un piston qui presse sur l'eau d'un petit corps de pompe. Celle-ci s'écoule par un ajutage muni d'un robinet qui étrangle à volonté la veine de manière à régler son écoulement et l'abaissement du piston.

259. La *lampe modérateur* est formée essentiellement d'un corps de pompe plein d'huile sur laquelle pèse un piston pressé contre elle par l'interposition d'un ressort qui s'appuie sur le fond supérieur. Un tube traverse le piston et s'élève jusqu'au bec, l'huile s'y engage sous l'influence de cette pression. Mais il est évident qu'au commencement le liquide a peu de hauteur à parcourir, et le ressort beaucoup de force, tandis que l'inverse se produit à la fin. De là une cause d'irrégularité à laquelle on remédie par l'emploi d'un obturateur variable (*Pl. XV, fig.* 230).

A cet effet, la gaîne A, dans laquelle joue le tube creux B qui descend avec le piston, renferme dans son axe une

tige C. Le tube B s'en trouve encombré dans toute sa longueur, quand il est en haut, puis de moins en moins à mesure qu'il descend. De cette manière, la résistance auxiliaire décroît en même temps que la résistance utile augmente, et la compensation s'établit d'une manière satisfaisante.

260. L'*atmospheric clock* est un petit appareil fort économique employé en Angleterre pour obtenir une mesure grossière du temps, telle que celle que fournissent les sabliers. Le moteur est la pesanteur, et, comme elle ne donne pas un mouvement uniforme, on régularise la descente par la résistance à l'écoulement de l'air au travers d'un corps poreux.

Le système se compose d'un tube de verre fermé à la lampe, dans lequel se trouve un autre tube dont les deux extrémités sont garnies de bouchons poreux qui laissent tamiser l'air. Un index de mercure descend verticalement dans l'intérieur. Il chasse l'air par un des bouchons et l'aspire par l'autre. Quand il a parcouru toute la hauteur, on retourne l'appareil comme un sablier. On le gradue, du reste, par comparaison avec une horloge.

§ V.

RÉGULATEURS AÉRIENS.

261. Les régulateurs aériens sont les appareils qui détruisent en pure perte le travail par l'intervention de la résistance d'un milieu qui est toujours l'air atmosphérique.

Le *parachute* des aérostats est destiné à détruire incessamment le travail de la pesanteur pour rendre à peu près uniforme la descente de l'aéronaute (430). Il se compose simplement d'une membrane affectant la forme d'un im-

mense parapluie qui se déploie de lui-même pendant la chute, et auquel la nacelle demeure suspendue par un système de cordes amarrées à son sommet.

Le *volant à ailettes* est une roue à palettes qui déplace l'air par sa rotation. Il figure dans la sonnerie des horloges pour rendre les coups équidistants ou le mouvement du mécanisme de sonnerie uniforme. On le trouve aussi dans les anciens tournebroches, et enfin, sur de très-grandes dimensions, dans les plans automoteurs pour amortir la descente des wagons chargés.

CHAPITRE XVII.

RÉGULATEURS D'EMMAGASINEMENT.

§ I.

CROISEMENT.

262. Les régulateurs qui procèdent par emmagasinement du travail se classeront suivant le principe qui sert à cet aménagement. Nous établirons d'après cela les genres suivants :

PREMIER GENRE. — *Croisement.* — *Manivelles multiples.*

DEUXIÈME GENRE. — *Variation du bras de levier.* — *Fusées.*

TROISIÈME GENRE. — *Inertie.* — *Volants.*

QUATRIÈME GENRE. — *Pesanteur.* — *Contre-poids.*

CINQUIÈME GENRE. — *Élasticité.* — *Ressorts.*

263. MANIVELLES MULTIPLES. — Un principe fort simple de régularisation consiste, lorsque la fonction d'un appareil périodique est irrégulière, à en installer plusieurs dont les périodes ne commencent que successivement. Il s'établit par là une compensation entre les écarts dus à chacun d'eux en particulier.

Ce principe s'applique notamment à la conduite des manivelles par des bielles. On considère ordinairement la bielle comme restant parallèle à elle-même, ou en d'autres

termes on néglige son obliquité, qui sera faible si la bielle est d'une certaine longueur par rapport au bras de manivelle. Cette dernière a alors deux points morts aux extrémités du diamètre parallèle à la bielle. On distingue, d'après cela, le simple effet et le double effet, suivant que la bielle, après avoir tiré d'un point mort à l'autre, cesse toute action dans la seconde moitié de la circonférence, ou bien, au contraire, pousse alors le bouton comme elle l'avait tiré dans le premier demi-tour. La manivelle à double effet est évidemment plus régulière que l'autre; et, comme nous indiquerons un moyen simple de changer le simple effet en double effet (278), nous pourrons, pour la théorie de la régularisation, nous en tenir à cette dernière hypothèse.

On a employé et calculé jusqu'ici les manivelles doubles calées à angle droit, les manivelles triples à 120 degrés, les manivelles quadruples placées aux quatre quadrants. Je me propose d'établir directement la théorie pour des manivelles de m bras que nous supposerons, bien entendu, équidistants ou disposés suivant les rayons d'une étoile régulière (1). Quant à la disposition pratique de ces manivelles, elle ne saurait offrir de difficulté en général, puisqu'on peut, à la rigueur, les supposer montées sur des arbres distincts mis en communication par des roues dentées, si l'on ne veut pas employer $m-2$ excentriques (165), ou couder l'arbre $m-2$ fois en plaçant des manivelles libres à ses deux extrémités.

264. Remarquons que pour faire le calcul nous pouvons supposer tous les bras situés simultanément d'un même côté du diamètre des points morts. En effet, si m est pair, il existe deux bielles aux extrémités de chaque diamètre, et,

(1) *Théorie des manivelles multiples*, par J.-N. HATON DE LA GOUPILLIÈRE, *Annales des Mines*, t. III, p. 57; 1863.

comme elles sont de sens contraires, on peut en supprimer, par la pensée, la moitié en doublant l'effort des autres. Le moment total ne subira par là aucune altération. Si m est impair, en retournant les manivelles qui se trouvent d'un même côté des points morts, on les dispose suivant les bissectrices des autres, et rien ne se trouve changé par là à l'état de choses, si ce n'est que l'angle des bras adjacents est réduit à moitié. Nous pouvons donc supposer tous ces bras d'un même côté, et désigner alors par n leur nombre effectif, qui sera $\frac{m}{2}$ ou m, suivant les deux cas que nous venons d'envisager. On aura, par exemple, pour les valeurs les plus simples :

$m = 1$	ou	2	$n = 1$
4			2
3	ou	6	3
8			4
5	ou	10	5

Le mouvement est essentiellement périodique, et tout le système se retrouvera dans des conditions identiques après une rotation de $\frac{\pi}{n}$, puisque chaque bras se sera alors substitué au précédent. Je pourrai donc supposer que l'angle de rotation θ, compté à partir du point mort supérieur, ne varie que de zéro à $\frac{\pi}{n}$. Dès lors aucune manivelle ne franchira le point mort inférieur, et la difficulté du changement de sens sera définitivement écartée.

265. Si nous désignons par P l'effort total transmis, ou par $\frac{P}{n}$ la traction de chaque bielle que nous supposons constante, le moment de la force de rang k sera

$$\frac{P}{n} \cdot r \sin\left(\theta + k\frac{\pi}{n}\right),$$

et par suite le moment total

$$\mathbf{M} = \frac{\mathrm{P}r}{n} \cdot \sum_{0}^{n-1} \sin\left(\theta + k\frac{\pi}{n}\right).$$

Pour évaluer cette somme, posons identiquement

$$\cos\left[\theta + (2k+1)\frac{\pi}{2n}\right] - \cos\left[\theta + (2k-1)\frac{\pi}{2n}\right] = 2\sin\frac{\pi}{2n}\sin\left(\theta + k\frac{\pi}{n}\right);$$

en écrivant cette équation pour toutes les valeurs de k et ajoutant, il vient

$$2\sin\frac{\pi}{2n} \cdot \sum_{0}^{n-1} \sin\left(\theta + k\frac{\pi}{n}\right) = \sum_{0}^{n-1} \cos\left[\theta + (2k+1)\frac{\pi}{2n}\right] - \sum_{0}^{n-1} \cos\left[\theta + (2k-1)\frac{\pi}{2n}\right].$$

Mais si l'on remarque que chacun des termes d'une des sommes figure avec un signe contraire dans l'autre, on voit que le second membre se réduit aux termes extrêmes de ces deux sommes, c'est-à-dire à

$$\cos\left[\theta + (2n-1)\frac{\pi}{2n}\right] - \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2n}\right) = 2\sin\frac{\pi}{2}\sin\left[\theta + (n-1)\frac{\pi}{2n}\right] = 2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2n}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{2n} - \theta\right).$$

Nous avons donc

$$\sum_{0}^{n-1} \sin\left(\theta + k\frac{\pi}{n}\right) = \frac{\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2n}\right)}{\sin\frac{\pi}{2n}},$$

et enfin

$$(1) \qquad M = \frac{\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2n}\right)}{n \sin\frac{\pi}{2n}} \cdot Pr.$$

266. Cherchons la limite M_∞ vers laquelle tend M lorsque n s'accroît indéfiniment. Comme la formule précédente peut s'écrire

$$M = \frac{2}{\pi} Pr. \frac{\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2n}\right)}{\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}}\right)},$$

on reconnaît que le dénominateur tend vers l'unité et le numérateur vers $\cos\theta$; mais θ reste compris entre zéro et $\frac{\pi}{n}$, qui tend lui-même vers zéro. Le numérateur se réduit donc aussi à l'unité, et il vient

$$(2) \qquad M_\infty = \frac{2}{\pi} Pr = 0{,}6366190\ldots Pr.$$

Cette valeur correspond, dans un système quelconque, à l'angle θ_0 déterminé par la formule

$$\frac{\cos\left(\theta_0 - \frac{\pi}{2n}\right)}{n \sin\frac{\pi}{2n}} = \frac{2}{\pi};$$

d'où les deux valeurs

$$(3) \qquad \theta_0 = \frac{\pi}{2n} \pm \operatorname{arc\,cos}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}}\right),$$

évidemment symétriques par rapport à la bissectrice de l'angle $\frac{\pi}{n}$ de la période.

On a, par exemple, pour les cas les plus simples :

$n=1$	$\theta'_0=39°32'25''$	$\theta''_0=140°27'35''$
2	$19°12'\ 0''$	$70°48'\ 0''$
3	$14°36'56''$	$45°23'\ 4''$
4	$9°31'55''$	$35°28'\ 5''$
5	$7°37'10''$	$28°22'50''$

267. Je désignerai encore par M_0 la valeur moyenne du moment total. Remarquons tout d'abord qu'elle doit être indépendante de n. En effet, après une révolution, comme chaque bielle est revenue à sa position initiale, on a obtenu le même travail que si toutes étaient parties du point mort, ne formant qu'une seule bielle d'effort P. Donc le travail total est indépendant de n, et, comme il est le produit du moment moyen par 2π, il en est de même de ce dernier.

Il suffit donc d'évaluer M_0 dans un cas particulier, par exemple pour $n=\infty$; mais alors le moment total est constant et égal, par cela même, à sa valeur moyenne

$$(4) \qquad M_0 = M_\infty = \frac{2}{\pi} Pr.$$

L'angle θ_0 qui vient d'être calculé (3) fait donc connaître les positions pour lesquelles le moment total atteint sa valeur moyenne.

268. Désignons enfin par M_1, M_2 le minimum et le maximum du moment total, et par θ_1, θ_2, les positions correspondantes.

Le minimum de M (1) correspond au plus petit cosinus ou au plus grand arc $\frac{\pi}{2n} - \theta$, c'est-à-dire à la plus petite valeur de θ

$$\theta_1 = 0,$$

qui indique le point mort. Il vient alors

$$M_1 = \frac{Pr}{n} \operatorname{cotang} \frac{\pi}{2n}. \tag{5}$$

On a, par exemple :

$n = 1$	$\frac{1}{n} \operatorname{cotang} \frac{\pi}{2n} = 0,00000$
2	0,50000
3	0,57735
4	0,59862
5	0,61554

Le maximum correspond au plus grand cosinus ou au plus petit arc en valeur absolue, c'est-à-dire zéro, si zéro est compris dans les limites. On l'obtient, en effet, pour l'angle

$$\theta_2 = \frac{\pi}{2n},$$

qui correspond à la bissectrice de l'angle de la période, Il vient alors

$$M_2 = \frac{Pr}{n} \operatorname{cosec} \frac{\pi}{2n}. \tag{6}$$

On a, par exemple :

$n = 1$	$\frac{1}{n} \operatorname{cosec} \frac{\pi}{2n} = 1,00000$
2	0,70710
3	0,66666
4	0,64873
5	0,64721

Le rapport du minimum au maximum sera

$$\frac{M_1}{M_2} = \cos \frac{\pi}{2n},$$

et l'irrégularité

$$1 - \frac{M_1}{M_2} = 2 \sin^2 \frac{\pi}{4n}. \tag{7}$$

On a, par exemple :

$n = 1$	$2\sin^2\frac{\pi}{4n} = 1,00000$
2	0,29290
3	0,13398
4	0,07612
5	0,04894

On reconnaît par là que la régularisation est déjà très-satisfaisante avec les manivelles triples.

269. Le minimum peut être mis sous la forme

$$M_1 = \frac{\frac{\pi}{2n}}{\operatorname{tang}\frac{\pi}{2n}} M_0.$$

Or, l'arc est moindre que la tangente, et ils tendent ensemble vers zéro. On aura donc

$$n = 1, \quad \text{minimum minimorum} = 0,$$
$$n = \infty, \quad \text{maximum minimorum} = M_0 = \frac{2}{\pi} Pr.$$

Le maximum peut de même se mettre sous la forme

$$M_2 = \frac{\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}} M_0.$$

Or, l'arc est supérieur au sinus, et ils tendent ensemble vers zéro. On aura donc

$$n = 1, \quad \text{maximum maximorum} = Pr,$$
$$n = \infty, \quad \text{minimum maximorum} = M_0 = \frac{2}{\pi} Pr.$$

§ II.

FUSÉES.

270. Lorsque la force motrice doit subir des variations prévues et nuisibles, si elle agit, comme c'est le cas le plus

fréquent, sur un corps tournant, on a la ressource de faire varier en raison inverse son bras de levier. Par là on laisse constant le moment de la force dont dépend uniquement le mouvement de rotation.

Tambours coniques.— Un premier moyen consiste dans l'emploi d'un *tambour conique* sur lequel s'enroulera la corde qui exerce l'action motrice. On s'en sert dans l'horlogerie sous le nom de *fusée* pour contre-balancer la variation de l'action du ressort, très-variable, depuis l'instant où il est bandé jusqu'à celui où il est détendu.

On s'en sert également pour l'extraction des mines, afin de contre-balancer la variation de la résistance à vaincre ou du poids à soulever, qui comprend, outre le minerai, la différence des portions du câble qui pendent de chaque côté du treuil, différence qui peut varier, pour un sens déterminé, de zéro au double de la profondeur du puits.

Si l'on projette le système sur un plan perpendiculaire à l'axe, on obtient la figure d'un câble de grosseur convenable qui s'enroulerait sur lui-même. Aussi la théorie de cet appareil rentre-t-elle complétement dans celle du suivant, pour lequel je me contenterai de la développer.

271. *Bobines.* — On rencontre encore dans les mêmes circonstances les *bobines* sur lesquelles des câbles plats s'enroulent sur eux-mêmes, en faisant varier à chaque instant, par leur épaisseur, leur bras de levier. On peut d'ailleurs, comme je vais le faire voir, déterminer les éléments de l'appareil de manière à obtenir la meilleure régularisation. Cette analyse, à la forme près, a été donnée pour la première fois par M. Combes.

Le système se compose de deux bobines accolées, sur lesquelles l'enroulement s'opère en sens inverses. Chacune d'elles supporte une benne de poids p, dont une seule renferme une charge P, et de plus un câble dont le poids total

est q, ou le poids par unité de longueur $\frac{q}{l}$, en désignant par l la profondeur du puits. L'enroulement s'effectue suivant une spirale d'Archimède, puisque le rayon augmente à chaque tour de l'épaisseur e du câble :

$$r = \rho + \frac{e}{2\pi}\theta;$$

mais l'inclinaison de la courbe sur le rayon est assez faible pour que l'on puisse traiter son arc élémentaire comme un arc de cercle concentrique et l'évaluer par la formule

$$s = \int_0^{\theta} r\,d\theta = \rho\theta + \frac{e}{4\pi}\theta^2.$$

Nous considérerons s comme représentant la portion enroulée à partir du point où les bennes se rencontrent, en commençant à cet instant l'évaluation de θ. ρ désignera dès lors le rayon de la rencontre. Si nous appelons d'ailleurs, pour plus de clarté, n le nombre variable de tours, on pourra remplacer θ par $2n\pi$ et écrire

$$s = 2\pi n\rho + \pi n^2 e.$$

On trouverait de même pour la portion déroulée de l'autre câble

$$s' = 2\pi n\rho - \pi n^2 e.$$

Nous en déduirons

$$(1) \qquad s + s' = 4\pi n\rho, \quad s - s' = 2\pi n^2 e.$$

Pour connaître le nombre de tours n_1 qui sépare l'instant de la rencontre du commencement de l'opération, nous remarquerons que les bennes étant parties des deux extrémités du puits, et se trouvant alors à la même hauteur, la somme des espaces parcourus $s + s'$ doit reproduire la

profondeur l du puits. On a donc (1)

$$(2) \qquad l = 4\pi n_1 \rho, \quad n_1 = \frac{l}{4\pi\rho}.$$

Pour connaître d'ailleurs la profondeur S de ce point, nous remarquerons qu'elle est en général fournie par s, et qu'on aura par suite

$$(3) \qquad S = 2\pi n_1 \rho + \pi n_1^2 e = \frac{l}{2} + \frac{el^2}{16\pi\rho^2}.$$

Formons actuellement l'expression M du moment résistant total. D'un côté, nous trouvons la benne chargée $P+p$ et une longueur $S-s$ de câble pesant $\frac{q}{l}(S-s)$, le tout appliqué à un rayon d'enroulement $\rho+ne$; de l'autre, c'est-à-dire avec un signe contraire, la benne vide p et un poids de câble $\frac{q}{l}(S+s')$ avec un bras de levier $\rho-ne$. Il vient ainsi

$$M = \left[P+p+\frac{q}{l}(S-s)\right](\rho+ne) - \left[p+\frac{q}{l}(S+s')\right](\rho-ne)$$

$$= P\rho + (P+2p)ne + 2\frac{q}{l}Sne - \frac{q}{l}(s+s')\rho - \frac{q}{l}(s-s')ne,$$

ou, en substituant les valeurs (1) et (3),

$$M - P\rho = \left[(P+2p+q)e + \frac{qle^2}{8\pi}\cdot\frac{1}{\rho^2} - 4\pi\frac{q}{l}\rho^2\right]n - 2\pi\frac{q}{l}e^2 n^3.$$

Le premier membre représente la variation subie par le moment M par rapport à la valeur $P\rho$ qu'il prend à l'instant de la rencontre pour $n=0$. En la désignant par Δ, nous pourrons écrire simplement

$$\Delta = An - Bn^3.$$

Cette fonction s'annule pour

$$n_0 = \sqrt{\frac{A}{B}},$$

ce qui permet de la mettre sous la forme

$$\Delta = B(n_0^2 - n^2)\,n.$$

Elle change de signe au delà. Comme Δ est du reste nul avec n, il s'ensuit qu'entre zéro et n_0 il atteint un maximum Δ_2 pour une certaine valeur n_2 que fournira l'équation dérivée

$$n_0^2 - 3n_2^2 = 0,$$

$$n_2 = \frac{n_0}{\sqrt{3}},$$

$$\Delta_2 = \frac{2}{3\sqrt{3}} B n_0^3.$$

Nous obtiendrons d'après cela la meilleure régularisation, si nous déterminons la limite extérieure n_1, jusqu'à laquelle nous étendons l'application de la formule de manière que la valeur correspondante Δ_1 soit égale, sauf son signe, au maximum Δ_2. On aura, en effet, une oscillation égale de part et d'autre, c'est-à-dire la moindre possible en valeur absolue pour une amplitude donnée. De là l'équation

$$-B(n_0^2 - n_1^2)\,n_1 = \frac{2}{3\sqrt{3}} B n_0^3,$$

remarquable en ce que tous les éléments de la question en disparaissent d'eux-mêmes. Il reste

$$\left(\frac{n_1}{n_0}\right)^3 - \left(\frac{n_1}{n_0}\right) - \frac{2}{3\sqrt{3}} = 0.$$

Cette équation est du troisième degré et n'admet qu'une seule racine réelle

$$\frac{n_1}{n_0} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

On peut déterminer d'après cela l'instant de la variation nulle et de la variation maximum en fonction de l'amplitude totale (2) :

$$n_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} n_1 = \frac{\sqrt{3}}{8\pi} \cdot \frac{l}{\rho},$$

$$n_2 = \frac{n_0}{\sqrt{3}} = \frac{n_1}{2} = \frac{1}{8\pi} \cdot \frac{l}{\rho}.$$

On remarquera que, dans ces conditions, la variation extrême dans un sens correspond à la moitié de l'intervalle qui sépare la rencontre de la variation extrême dans l'autre sens, ce qui donne une répartition fort simple de l'oscillation.

Il reste maintenant à déterminer les éléments de l'appareil de manière à réaliser ces résultats. Nous aurons pour cela, en égalant les deux valeurs de n_0,

$$\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{3}}{8\pi} \cdot \frac{l}{\rho}.$$

Si l'on remet maintenant pour A et B les expressions qu'ils représentent, on obtient l'équation bicarrée

$$(4) \qquad \frac{\rho^4}{e^2} - \frac{(P + 2p + q)\, l}{4\pi q} \cdot \frac{\rho^2}{e} - \frac{l^2}{128\pi^2} = 0.$$

Elle n'a évidemment qu'une seule racine réelle et positive qui satisfera à la question. Connaissant alors le rayon moyen ρ, on aura ensuite, pour les rayons du noyau et des joues de la bobine,

$$R' = \rho - n_1 e = \rho - \frac{le}{4\pi\rho},$$

$$R'' = \rho + n_1 e = \rho + \frac{le}{4\pi\rho}.$$

On voit, par l'équation (4), que le rayon moyen croît comme la racine de l'épaisseur du câble.

§ III.

VOLANTS.

272. Les volants sont les appareils qui emmagasinent le travail en faisant intervenir l'inertie d'une masse importante. La force vive étant, en effet, de la forme mv^2, sa demi-variation élémentaire sera $mv\,dv$. Si donc on veut, à égalité de travail développé, que la vitesse donnée v varie peu ou que dv soit faible, il suffit d'augmenter m, c'est-à-dire d'ajouter aux masses des organes proprement dits, calculées en vue de leurs fonctions respectives, une masse additionnelle qui ne joue qu'un rôle de présence et qu'on appelle *volant*.

Le mouvement d'un volant doit être nécessairement progressif, car, s'il était alternatif, sa force vive serait nulle aux extrémités de la course, tandis que le volant doit être, en quelque sorte, un réservoir de force vive. Le mouvement rectiligne ne peut donc être employé pour les volants, car il est nécessairement limité (¹). Comme, du reste, il convient de n'attribuer à une masse de cette importance qu'un mouvement simple, le choix se trouve circonscrit à la seule rotation. Ces corps tournants sont formés parfois de boules situées aux extrémités de rayons, comme dans les treuils de certains puits et dans les presses à timbre sec. Mais ce système est dangereux, et on lui préfère, dans la presque totalité des cas, la forme d'un anneau de grand rayon.

Si r désigne le rayon moyen de cet anneau, auquel on peut, pour un simple aperçu, supposer condensée toute sa

(¹) On doit excepter le cas des trains de chemin de fer, dont la course peut être considérée comme illimitée. Mais dans cette circonstance particulière la masse mobile est tellement considérable, qu'il est inutile de lui en adjoindre une auxiliaire.

masse m, la vitesse sera ωr, la force vive $m\omega^2 r^2$, et son demi-accroissement $mr^2\omega d\omega$. Considérant encore ω comme assigné et $d\omega$ comme devant être faible, on voit qu'il suffit d'augmenter le moment d'inertie mr^2. On peut pour cela, en premier lieu, disposer de la masse. Mais on augmente par là les frais de construction, on rend la machine encombrante, on développe les frottements, enfin l'on ne fait varier le moment d'inertie qu'en raison simple de m. On exerce plus d'influence en augmentant le rayon qui figure par son carré et sans aucun des inconvénients précédents. Il convient pourtant d'ajouter que, dans l'un et l'autre cas, on développe dans le même rapport les forces centrifuges, c'est-à-dire la tendance à l'arrachement des bras.

273. Quant à la position dans laquelle il convient d'installer le volant, elle n'est pas indifférente si l'appareil est exposé à des chocs ou variations brusques d'action de la part du moteur ou de la résistance. Il convient alors de la placer dans l'ordre des transmissions entre la cause perturbatrice et le mécanisme que l'on veut préserver de son influence.

En effet, si un effort additionnel prend brusquement naissance, il en résulte pour tout le système une accélération générale. D'après cela, l'effort additionnel peut être décomposé en deux, l'un mesurant la force que le volant doit transmettre à l'appareil pour l'accélérer, et un autre pour accélérer le volant lui-même. Mais, à égalité d'accélération, les forces sont en raison inverse des masses, et s'il s'agit de corps tournants, des moments d'inertie. Celui du volant est considérable par rapport au reste du système. L'effort transmis au mécanisme proprement dit est donc une faible fraction de la force additionnelle en question.

On peut comparer cette influence préservatrice du volant sur le mécanisme, à l'égard des chocs, à celle d'un

écran sur un corps pour lequel on redoute l'action de la chaleur. Il suffit que chacun d'eux soit interposé entre le corps et l'influence dont on veut le préserver.

274. MANIVELLE SIMPLE A SIMPLE EFFET. — J'arrive au calcul du moment d'inertie des volants, et, pour plus de clarté, je l'expliquerai d'abord sur un exemple que j'emprunterai aux transmissions par bielle et manivelle. Je choisirai la plus simple et en même temps la plus irrégulière, la manivelle simple à simple effet.

Nous supposerons qu'une bielle exerce l'effort invariable P pendant la moitié de la course, tandis qu'une résistance constante Q s'exerce continuellement à un rayon fixe q. Leurs travaux respectifs seront pour un tour entier $2Pr$ et $Q.2\pi q$. Comme le mouvement doit être périodique, il ne doit pas y avoir au bout d'un tour de variation de force vive, ni d'excédant de travail dans aucun sens. Nous égalerons donc les expressions précédentes, ce qui donne

$$\frac{Pr}{Qq} = \pi.$$

Comme c'est le moment total qui règle la rotation, le minimum et le maximum de vitesse auront lieu lorsque le moment moteur commencera ou cessera d'être supérieur au moment résistant, c'est-à-dire lorsqu'ils seront égaux. Nous poserons donc

$$Pr\sin\theta = Qq,$$

en comptant l'angle de rotation θ à partir du point mort extrême, ou, d'après la relation précédente,

$$\sin\theta = \frac{1}{\pi}.$$

On déduit de là deux valeurs supplémentaires l'une de l'autre,

$$\theta' = 18^\circ 33' 24'',$$
$$\theta'' = 161^\circ 26' 36''.$$

Je désignerai par ω' la vitesse angulaire minima et par ω'' la vitesse maxima qui correspondent respectivement à la première et à la seconde de ces positions.

Soit Ω la vitesse moyenne déduite du nombre de tours. Nous admettrons, suivant une approximation bien suffisante pour une détermination de cette nature, qu'elle est la moyenne arithmétique des vitesses limites,

$$\Omega = \frac{\omega' + \omega''}{2}.$$

Nous désignerons en outre par λ le coefficient de régularisation, en entendant par là que la variation extrême $\omega'' - \omega'$ de la vitesse doit être une fraction λ de la vitesse moyenne

$$\lambda\Omega = \omega' - \omega'';$$

d'où

$$\lambda\Omega^2 = \frac{\omega''^2 - \omega'^2}{2}.$$

Posons actuellement l'équation de la force vive entre les positions θ' et θ''. La force vive du volant proprement dit est $M\omega^2R^2$, et nous opérerons à coup sûr en passant sous silence le reste des masses en mouvement, car nous devons trouver ainsi pour le moment d'inertie une valeur un peu plus que suffisante. Le demi-accroissement de force vive sera, par suite,

$$\frac{I}{2} MR^2(\omega''^2 - \omega'^2)$$

ou

$$\lambda\Omega^2 MR^2.$$

Le travail de Q aura d'ailleurs pour valeur

$$Q \cdot q(\theta'' - \theta')$$

ou

$$2Qq\left(\frac{\pi}{2} - \theta'\right),$$

puisque θ' et θ'' sont supplémentaires. Enfin le travail de P, dont la direction reste constamment celle du diamètre des points morts, sera

$$P(r\cos\theta' - r\cos\theta'')$$

ou

$$2Pr\cos\theta'.$$

Nous aurons donc

$$\lambda\Omega^2 MR^2 = 2Pr\left[\cos\theta' - \frac{Qq}{Pr}\left(\frac{\pi}{2} - \theta'\right)\right].$$

Or, le rapport $\frac{Qq}{Pr}$ a pour valeur $\frac{1}{\pi}$, d'après la première relation. En second lieu, $2Pr$ est le travail moteur égal au travail résistant pendant un tour et dont je représenterai la valeur commune par T. Il vient d'après cela

$$\lambda\Omega^2 MR^2 = T\left(\cos\theta' - \frac{1}{2} + \frac{\theta'}{180^\circ}\right).$$

Si l'on remarque enfin que la parenthèse est un coefficient purement numérique dont la valeur est 0,5521, on aura définitivement

$$\lambda\Omega^2 MR^2 = 0{,}5521.T,$$

formule qui déterminera le moment d'inertie du volant MR^2 pour un degré de régularisation λ en fonction de la vitesse et de la puissance de la machine.

Si, pour rendre cette formule plus facilement applicable, on remplace la masse par le poids p,

$$M = \frac{p}{g},$$

la vitesse angulaire par le nombre t de tours par minute,

$$\Omega = \frac{2\pi.t}{60},$$

le travail pour un tour par la force en chevaux φ,

$$T = \frac{75.\varphi}{\frac{1}{60}t},$$

elle deviendra, tout calcul fait,

$$\rho R^2 = 222050\,\frac{\varphi}{\lambda t^2}.$$

275. MANIVELLE MULTIPLE A DOUBLE EFFET. — La marche à suivre pour le cas d'une manivelle multiple d'ordre quelconque ne diffère en rien de la précédente. Il faut exprimer en premier lieu la condition de périodicité. Le travail résistant pendant un tour est encore $2\pi Qq$. Le travail moteur est le produit du moment moyen M_0 [267, (4)] par le déplacement angulaire 2π. On a donc

$$Qq = M_0 = \frac{2}{\pi} Pr.$$

L'égalité du moment moteur et du moment résistant sera de même

$$M = Qq,$$

c'est-à-dire

$$M = M_0.$$

Les limites de vitesse correspondent, par conséquent, aux deux valeurs de l'angle θ_0 du moment moyen [266, (3)] :

$$\theta' = \frac{\pi}{2n} - \arccos\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}}\right),$$

$$\theta'' = \frac{\pi}{2n} + \arccos\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}}\right),$$

symétriques, ainsi que nous l'avons déjà remarqué, par rapport à la bissectrice de l'angle de la période.

Posons encore l'équation de la force vive entre les positions θ' et θ''. L'accroissement de la demi-force vive sera comme ci-dessus (274)

$$\lambda\Omega^2 MR^2.$$

Le travail de la résistance aura pour valeur le produit de son moment constant Qq par le déplacement angulaire, qui est le double de la distance de θ' à la bissectrice $\frac{\pi}{2n}$, c'est-à-dire

$$2Qq \arccos\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}}\right),$$

ou encore, d'après la première relation,

$$\frac{4}{\pi} Pr \arccos\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}}\right).$$

Quant au travail de la puissance, il sera

$$\int_{\theta'}^{\theta''} M d\theta = \frac{Pr}{n\sin\frac{\pi}{2n}} \int_{\theta'}^{\theta''} \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2n}\right) d\left(\theta - \frac{\pi}{2n}\right)$$

$$= \frac{Pr}{n\sin\frac{\pi}{2n}} \left[\sin\left(\theta'' - \frac{\pi}{2n}\right) - \sin\left(\theta' - \frac{\pi}{2n}\right)\right]$$

$$= \frac{2Pr}{n\sin\frac{\pi}{2n}} \sin\frac{\theta'' - \theta'}{2} \cos\left(\frac{\theta'' + \theta'}{2} - \frac{\pi}{2n}\right),$$

c'est-à-dire, d'après les valeurs de θ' et θ'',

$$\frac{2Pr}{n\sin\frac{\pi}{2n}}\sin\left[\arccos\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}}\right)\right]$$

$$=\frac{2Pr}{n\sin\frac{\pi}{2n}}\sqrt{1-\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}}\right)^2}=\frac{4}{\pi}Pr\sqrt{\left(\frac{\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}\right)^2-1}.$$

L'équation de la force vive sera d'après cela, en remplaçant par T le travail total pour un tour $4Pr$,

$$\lambda\Omega^2MR^2=\frac{T}{\pi}\left[\sqrt{\left(\frac{\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}\right)^2-1}-\arccos\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}}\right)\right].$$

Si l'on fait enfin subir à cette formule la même transformation qu'à celle du problème précédent, il viendra définitivement

$$pR^2=K\frac{\varphi}{\lambda t^2},$$

en désignant, pour abréger, par K le coefficient numérique

$$K=1281213\left[\sqrt{\left(\frac{\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}\right)^2-1}-\arccos\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}}\right)\right].$$

On aura, par exemple, dans les cas les plus simples :

$r=1$	423662
2	42446
3	8387
4	5057
5	2587

On a déjà une économie décisive avec les manivelles triples.

276. MÉTHODE GRAPHIQUE. — On peut suivre, pour la détermination du moment d'inertie d'un volant, une marche générale fondée sur des procédés graphiques.

A cet effet, on prendra deux axes rectangulaires, l'un des abscisses pour représenter les espaces, l'autre des ordonnées pour les forces tangentielles, c'est-à-dire celles qu'il suffit de multiplier par le déplacement pour avoir le travail (*Pl. IV*, *fig.* 51). On construira ainsi deux courbes, l'une pour la force motrice, l'autre pour la résistance. Le travail de chacune de ces forces est l'aire de la courbe correspondante, car l'aire élémentaire est le produit de l'ordonnée par l'accroissement d'abscisse ou de la force tangentielle par le déplacement infiniment petit.

D'après cela, la condition de périodicité ou d'égalité du travail au bout d'un tour s'exprimera par l'égalité des aires totales

$$P_1P_2M_1M_2 = P_1P_2R_1R_2,$$

en sous-entendant d'ailleurs l'égalité des ordonnées et des inclinaisons extrêmes de chaque courbe pour que la fin d'une période soit le commencement de la période suivante.

Le minimum et le maximum de vitesse correspondront aux instants où le travail résistant cesse d'être prépondérant ou bien recommence à l'être, c'est-à-dire pour les positions P_1P' et P_1P'' que fournissent les intersections K' et K'' des deux courbes.

Pour déterminer le moment d'inertie, nous poserons encore l'équation de la force vive entre ces deux positions. Le demi-accroissement de la force vive sera, comme toujours, exprimé par $\lambda\Omega^2MR^2$. La différence des deux travaux sera d'ailleurs dans cet intervalle représentée par l'aire fermée $K'RK''M$. Si donc T désigne le travail moteur ou résistant développé pendant la période et représenté par l'aire totale de l'une ou l'autre des deux courbes, par

exemple $P_1P_2M_1M_2$, l'équation sera

$$\lambda\Omega^2MR^2 = T.\frac{K'RK''M}{P_1P_2M_1M_2}.$$

Il suffira, par suite, de mesurer ces deux arcs sur l'épure et de substituer leur rapport α. Rien n'empêche d'ailleurs de faire subir à cette formule la même transformation que dans les exemples précédents, ce qui l'amène à la forme définitive

$$pR^2 = 41838.\frac{\alpha\varphi}{\lambda t^2}.$$

§ IV.

CONTRE-POIDS.

277. Les contre-poids sont les appareils qui emmagasinent le travail par l'intervention de la pesanteur. On introduit à cet effet des masses additionnelles qui ne jouent qu'un rôle de présence, et on les dispose de manière à monter pendant la tendance à l'accélération et à descendre dans le cas contraire. On développe ainsi un travail opposé à l'excédant qui tend à se produire.

Il est inutile d'ajouter qu'on ne peut, par ce procédé, créer ni détruire du travail. Le contre-poids finit toujours par s'élever et s'abaisser des mêmes quantités. On ne modifie que la répartition du travail.

278. *Contre-poids des manivelles.* — Pour faire fonctionner à double effet une bielle qui d'elle-même agirait à simple effet dans le sens vertical, et de haut en bas, il suffit de placer sur le prolongement de la manivelle un contre-poids égal à la moitié de la force qui serait avec la traction de la bielle en raison inverse des deux bras.

En effet, son moment, et par suite son travail, seront la moitié de ceux de la bielle. Le travail moteur se trouvera donc réduit à moitié pendant la descente du bouton et la

remontée du contre-poids. Lorsque, au contraire, la bielle cesse toute action, le contre-poids commence à descendre et développe alors un travail égal à celui de son ascension. On retrouve donc l'autre moitié du travail total, qui se trouve ainsi réparti par égale portion entre les deux parties de la course.

On place aussi quelquefois dans les manivelles à simple effet un contre-poids à angle droit sur le bras, de manière qu'il le précède dans le mouvement de rotation. On facilite par là le passage au point mort supérieur où la bielle recommence son action et où le ralentissement est excessif. A la vérité, on gêne d'autant le passage au point mort inférieur, mais il n'en résulte pas d'inconvénient; car la vitesse est à ce moment assez notable, puisque la bielle termine seulement alors son action.

On a soin enfin, dans toute manivelle, d'établir en prolongement de son bras un contre-poids destiné à l'équilibrer pour centrer l'appareil et éviter l'accélération que produirait sans cela la pesanteur.

279. *Contre-poids des machines de détente.* — Les machines à vapeur marchent ordinairement à détente, c'est-à-dire qu'après un certain parcours du piston, sous la pleine pression de la chaudière, on ferme l'admission en laissant seulement la vapeur introduite se détendre comme un ressort. On réalise par là des avantages dont nous n'avons pas à nous occuper en ce moment, mais il est clair, en revanche, que l'on rend l'action motrice assez irrégulière.

M. Laboulaye a proposé de remédier à cet inconvénient en plaçant à angle droit sur le milieu du balancier un bras de contre-poids. Dans chaque demi-course, la pleine pression est employée à remonter le contre-poids jusqu'au point maximum de sa course circulaire, après quoi il redescend en venant en aide à la détente.

280. *Pont-levis à flèche.* — Le pont-levis est un système dans lequel le travail de la pesanteur doit être incessamment détruit par un contre-poids, afin que l'on n'ait à lutter que contre les frottements pour pouvoir relever rapidement et avec peu de force le tablier du pont.

Dans un premier système, on relie le tablier à un châssis supérieur par des chaînes disposées sur les deux côtés du pont (*Pl. XV, fig.* 231). Ces deux corps tournent autour d'axes horizontaux O, O′. Les longueurs OA, O′A′ sont égales, et de plus les chaînes AA′ sont aussi égales à la distance des axes OO′, de telle sorte que la figure conserve toujours la forme d'un parallélogramme, et que le châssis tourne des mêmes angles que le tablier.

On dispose, en outre, un contre-poids sur la partie postérieure du châssis de manière que les droites Og, O′g', qui joignent les axes des deux pièces à leurs centres de gravité respectifs, soient en raison inverse de leurs poids et parallèles dans une position donnée, ce qui suffira, d'après ce que nous venons de dire, pour qu'elles le soient toujours. Dans ces conditions, le centre de gravité de l'ensemble se trouvera en G à l'intersection des deux droites menées par les centres de rotation et par les centres de gravité. On a, en effet, par hypothèse,

$$\frac{Og}{O'g'} = \frac{P'}{P};$$

en second lieu, d'après la similitude des triangles GOg, GO′g',

$$\frac{Og}{O'g'} = \frac{Gg}{Gg'};$$

d'où

$$\frac{Gg}{G'g'} = \frac{P'}{P},$$

ce qui montre que G est le centre de gravité. On a en

outre

$$\frac{GO}{GO'} = \frac{Og}{O'g'} = \text{const.}$$

D'après cela, le centre de gravité qui partage dans un rapport fixe la ligne invariable des centres de rotation est lui-même un point fixe, et la pesanteur n'effectue aucun travail sur l'ensemble.

281. *Pont-levis de Bélidor.* — On peut employer aussi un rouleau de contre-poids suspendu à l'extrémité de chaînes passées sur des poulies (*Pl. XV, fig.* 232). On l'oblige à rouler dans une courbe que l'on déduit de celle qui doit être décrite par son centre en portant sur toutes ses normales le rayon du rouleau (¹). Cette dernière ligne se construit par points d'après la condition que le travail de l'abaissement du contre-poids soit égal au travail d'élévation du tablier.

On figure pour cela une situation quelconque de ce dernier et l'on mesure la hauteur de son centre au-dessus de sa position initiale. Par le rapport inverse des poids, on obtient la distance verticale dont le contre-poids a dû s'abaisser, c'est-à-dire le plan horizontal dans lequel il se trouve alors; puis menant de l'extrémité du tablier une tangente à la poulie et la défalquant de la longueur totale de la chaîne, on décrit, à partir du point de contact et avec l'excédant de longueur, une développante du cercle de la poulie, qui devra également contenir le centre du rouleau. Ce point se trouve ainsi déterminé par l'intersection de cette développante et de la droite horizontale.

Pour connaître la nature géométrique de la courbe, réduisons la poulie à un point situé à une hauteur h au-dessus

(¹) HATON DE LA GOUPILLIÈRE, *Calcul infinitésimal*, p. 194.

de la charnière du pont. Si a désigne la longueur du tablier, P son poids, i son inclinaison à un instant quelconque, $\frac{1}{2}Pa\sin i$ sera son moment par rapport au plan de sa position horizontale. Si nous rapportons la courbe à des coordonnées polaires qui auraient pour pôle la poulie et pour axe la verticale, $h - r\cos\theta$ sera la hauteur du contrepoids p au-dessus de ce plan fixe et $p(h - r\cos\theta)$ exprimera son moment. On devra donc poser, pour assujettir le centre de gravité à rester dans le même plan horizontal,

$$\frac{1}{2}Pa\sin i + p(h - r\cos\theta) = C.$$

Si l'on envisage, d'autre part, le triangle formé par le tablier a, la verticale h et la portion $l - r$ de chaîne qui le ferme, i fournira la relation

$$(l - r)^2 = a^2 + h^2 - 2ah\sin i.$$

Il ne reste plus dès lors qu'à éliminer i entre ces deux équations. C'est une simple substitution qui donne

$$r^2 - 2r\left(l - 2\frac{p}{P}h\cos\theta\right) + l^2 - a^2 - h^2 + 4h\frac{C - ph}{P} = 0.$$

Si, pour plus de simplicité, nous supposons que le contrepoids arrive jusqu'à la poulie lorsque le tablier est baissé, nous aurons, en faisant $i = r = 0$ dans les deux premières relations,

$$ph = C, \quad l^2 = a^2 + h^2.$$

L'équation de la courbe se simplifie alors et devient

$$r = 2l - 4\frac{p}{P}h\cos\theta.$$

Elle représente un limaçon de Pascal qui se construira très-facilement comme conchoïde de cercle. On remarquera qu'elle est alors indépendante de la longueur du tablier.

282. *Câble de contre-poids des mines.* — Pour régulariser l'extraction des minerais, malgré la variation du poids du câble, on employait dans les anciennes machines une chaîne de contre-poids d'une disposition très-ingénieuse (*Pl. XV, fig.* 233).

La longueur de la chaîne est le quart de la profondeur du puits ou de la longueur du câble, son poids total est le même, et par suite son poids par mètre courant est quadruple. Enfin elle est amarrée au quart de la profondeur, et son extrémité libre est reliée au treuil par une corde dont nous négligeons l'influence. Dans ces conditions, nous allons reconnaître qu'il y a constamment équilibre entre le poids du câble et celui de la chaîne, et que l'on n'a, par suite, à élever que le poids constant du minerai.

En effet, à l'instant initial le poids total du câble agit vers la gauche du treuil et le poids total de la chaîne vers la droite, de sorte qu'il y a équilibre. Si la benne s'élève d'une hauteur h, le câble de gauche diminue de h, le câble de droite, d'abord nul pour supporter la benne vide qui redescend, augmente de cette même longueur, ce qui revient à diminuer de $2h$ le poids du câble de gauche. D'autre part, l'extrémité libre de la chaîne est descendue elle-même de h; mais cette chaîne se compose de deux parties, dont l'une pèse directement sur le point fixe et demeure sans action sur l'appareil, et dont l'autre se trouve suspendue à droite du treuil. Cette portion n'a donc varié que de $\frac{h}{2}$. Mais son poids, par unité de longueur, est quadruple de celui du câble; de sorte que les diminutions de poids de droite et de gauche se contre-balancent exactement. Comme, d'ailleurs, l'équilibre existait au premier instant, il subsistera encore à un moment quelconque.

283. *Câbles de contre-poids des gazomètres.* — Le gaz

d'éclairage est renfermé dans d'énormes cloches qui sont plongées dans l'eau à leur partie inférieure et soutenues par la force élastique du gaz en même temps que par des contre-poids que l'on suspend à des chaînes passées sur des poulies. Le poids de ces chaînes est calculé de manière que, pour un abaissement donné de la cloche, la somme des variations des deux séries de brins corresponde exactement à la perte de poids qui résulte, d'après le principe d'Archimède, de l'immersion des parois sur cette même hauteur. De cette manière, la cloche exerce toujours le même effort sur le gaz, quel qu'en soit le volume, et la pression reste constante, ainsi que le régime de distribution qui en est la conséquence.

§ V.

RESSORTS

284. Les ressorts sont les appareils qui emmagasinent le travail par l'intervention de l'élasticité. On introduit, à cet effet, des corps qui fléchissent sous les efforts additionnels, et reprennent leur forme en développant un travail contraire, lorsque la force diminue.

Ressorts solides. — On emploie le plus souvent des ressorts solides en acier, en bois, en gutta-percha. On s'en sert pour la suspension des voitures ou des wagons (456), pour les rabats des martinets (466), pour les tampons de choc (435) des wagons entre eux ou sur les têtes de ligne, etc.

Cloches à air. — On emploie aussi un matelas d'air pour régulariser le mouvement des fluides, soit l'eau, soit l'air. On les rencontre dans les machines soufflantes ou dans les pompes pour régulariser l'écoulement malgré les variations du mécanisme; dans le bélier hydraulique, ou aux robinets

de distribution d'eau dans les maisons pour amortir le coup de bélier produit par l'arrêt brusque de l'eau, etc.

On se sert aussi de cloches à air pour égaliser le travail fort irrégulier des moulins à vent. On emploie alors ce travail à comprimer de l'air, et la détente de celui-ci sert aux instants et dans les proportions convenables pour l'objet que l'on a en vue.

CHAPITRE XVIII.

MODÉRATEURS.

§ I.

MODÉRATEURS A FORCE CENTRIFUGE.

285. Les modérateurs, dont l'influence s'exerce directement sur le moteur, se composent toujours d'un appareil sensible aux variations de la marche et d'une connexion de celui-ci avec le récepteur.

Parlons d'abord de cette dernière, qui est la même pour tous les modérateurs. On doit citer comme la plus simple la connexion directe, mais elle présente un défaut grave. En effet, si la machine s'accélère, l'appareil sensible en ressent l'influence; le moteur se calme. Dès lors la vitesse tombe, l'appareil subit l'influence en sens inverse, le moteur reprend de l'activité. L'accélération reparaît, etc.; et, par suite, la marche se trouve soumise à une oscillation continuelle et très-fâcheuse.

Pour cette raison, on préfère de beaucoup interposer dans la connexion le système d'embrayage qui a été décrit ci-dessus (235; *Pl. XII*, *fig.* 199). L'appareil sensible se trouve alors en rapport direct avec le manchon d'embrayage M, et l'organe qui modère le moteur avec la roue d'angle A. Si la marche ne subit que des modifications insignifiantes, le manchon oscille entre les roues B, B′ sans se mettre en prise et sans caler ces roues; le moteur ne ressent donc aucune influence. Si la marche s'accélère par trop dans un sens ou

dans l'autre, le manchon M vient saisir pour quelques instants l'une des roues B, B′, qui cesse d'être folle et manœuvre dans le sens convenable l'organe modérateur. Le moteur cesse par suite son effet accidentel, la marche revient à l'état normal, le manchon reprend la position intermédiaire et rend la liberté à la roue qu'il avait calée. Aucune connexion n'existe plus entre l'appareil sensible et le moteur, de sorte que l'on évite la réaction en sens contraire, qui est inévitable avec la connexion directe (1).

Quant aux appareils sensibles, il en existe un assez grand nombre que nous répartirons en deux genres, suivant le principe employé pour créer cette sensibilité.

PREMIER GENRE. — *Modérateurs à force centrifuge.*

SECOND GENRE. — *Modérateurs à ressort.*

286. MODÉRATEURS A FORCE CENTRIFUGE. — Le mouvement de rotation uniforme d'un point matériel m, avec un rayon r et une vitesse angulaire ω, s'effectue sous l'influence d'une force centripète idéale $m\omega^2 r$ dirigée, suivant le rayon, vers le centre, et qui s'obtient en composant les forces réellement appliquées. On peut donc dire inversement que la force égale et opposée à la force centripète, et qu'on appelle *centrifuge*, ferait équilibre à ces forces réelles, et c'est ainsi que l'on envisage le plus ordinairement le phénomène. Comme la force centrifuge dépend de la vitesse angulaire, il est clair que cet équilibre ne sera pas le même pour toutes les vitesses. L'appareil par lequel il doit s'établir ne restera donc pas toujours dans le même état si on lui donne la pos-

(1) J'ajouterai qu'on peut établir la connexion dans les machines à vapeur avec le papillon d'admission ou avec l'organe de détente. Ce mode est de beaucoup préférable, car le premier crée, par l'étranglement de la veine, une détente dont l'effet est perdu ; tandis qu'on l'utilise dans le cylindre même avec le second système.

sibilité de varier, ce qui revient à dire qu'il sera alors sensible aux variations de la marche. Tel est le principe général des modérateurs à force centrifuge.

287. *Régulateur à boules.* — Le plus ordinaire est un losange articulé (182), dont deux branches portent des boules massives, ou des lentilles pour diminuer la résistance de l'air (*Pl. XV, fig.* 234). Son articulation supérieure participe à la rotation d'un arbre vertical qui fait partie de la machine. La force centrifuge écarte plus ou moins les boules, ce qui détermine l'ascension de l'articulation inférieure. Celle-ci est embrassée par une fourchette qui permet sa rotation, mais qui est entraînée par sa translation le long de l'axe. Elle bascule donc, et c'est ce mouvement que l'on utilise pour la réglementation.

Pour donner, sous une forme simple, la théorie de cet appareil, réduisons-le à un point matériel suspendu à l'extrémité d'une tige sans masse de longueur l, écartée de la verticale sous un angle α (*Pl. IV, fig.* 52). Nous considérerons, d'après ce qui précède, ce point comme en équilibre sous l'action de la force centrifuge $m\omega^2 r$ ou $m\omega^2 l \sin\alpha$, et des forces réelles, à savoir : son poids mg, la tension inconnue de la tige et une force F d'intensité convenable appliquée tangentiellement au cercle que le point est susceptible de décrire dans un plan vertical pendant son écartement. Comme le corps ne peut, relativement au système tournant, que se déplacer le long de ce cercle, l'équilibre s'exprimera en égalant à zéro la somme des projections de toutes les forces sur la tangente à ce cercle. La tension inconnue disparaît alors d'elle-même, et il reste

$$F + mg\sin\alpha - m\omega^2 l \sin\alpha . \cos\alpha = 0;$$

d'où

$$F = m\sin\alpha(\omega^2 l\cos\alpha - g).$$

La position d'équilibre spontané sans l'intervention

d'aucune force F s'obtiendra en faisant

$$F = 0.$$

On peut, pour cela, recourir à l'une ou à l'autre des deux hypothèses

$$\omega^2 l \cos\alpha - g = 0,$$
$$\sin\alpha = 0;$$

d'où les trois solutions

$$\cos\alpha' = \frac{g}{\omega^2 l}, \quad \alpha'' = 0, \quad \alpha''' = \pi.$$

Je dis que la première est une position d'équilibre stable et que les deux autres fournissent un équilibre instable.

Supposons, pour cela, la tige placée par rapport à la verticale sous un angle quelconque α moindre que α', nous aurons

$$\cos\alpha > \cos\alpha' > \frac{g}{\omega^2 l},$$
$$\omega^2 l \cos\alpha - g > 0,$$
$$F > 0.$$

La force est donc dirigée vers la verticale comme sur la figure, ce qui montre que la tige a tendance à s'en écarter. Nous obtiendrons évidemment les signes contraires pour un angle α supérieur à α'. On voit donc que, dans toutes les positions qui ne sont pas d'équilibre, la tige a tendance à se rapprocher de l'inclinaison α'. D'après cela, cette solution constitue une situation stable et les deux autres sont instables.

Il est clair d'ailleurs qu'on ne peut réaliser pratiquement qu'une position d'équilibre stable, et par suite la racine α' satisfait seule à la question. Mais elle donne encore lieu à une remarque nécessaire. Pour les grandes vitesses, on a

$$\omega = \infty, \quad \cos\alpha' = 0, \quad \alpha' = \frac{\pi}{2};$$

la tige est rapprochée de l'horizontale. Si ω diminue, elle s'incline peu à peu, et pour

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad \cos\alpha' = 1, \quad \alpha' = 0,$$

la tige est alors verticale. Pour des vitesses encore moindres, $\cos\alpha'$ est supérieur à l'unité et α' devient imaginaire. On comprend cependant qu'il doit exister nécessairement pour la tige quelque position stable suivant laquelle elle puisse se mettre; et, en effet, on peut reconnaître que la seconde solution α'' est maintenant devenue stable. Nous avons, en effet, dans le cas actuel,

$$\omega < \sqrt{\frac{g}{l}};$$

on en déduit

$$\omega^2 l - g < 0,$$

et *à fortiori,* pour un écart quelconque α,

$$\omega^2 l \cos\alpha - g < 0,$$
$$F < 0.$$

La force est alors dirigée de manière à s'éloigner de la verticale, et par suite il y a pour la tige tendance à s'en rapprocher, ce qui montre la stabilité de cette position. Cette nécessité d'un certain degré de rotation pour démarrer les boules n'a du reste rien d'absolu, et ne constitue pas un défaut de l'appareil, car on peut abaisser à volonté cette limite en prenant des tiges d'une longueur suffisante, puisque l figure au dénominateur de la vitesse limite.

En résumé, on voit que la tige reste pendante aux faibles vitesses; elle ne se démarre de la verticale que pour une certaine valeur

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}},$$

et, à partir de ce point, elle s'écarte de plus en plus en se maintenant sous l'inclinaison

$$\cos\alpha' = \frac{g}{\omega^2 l}.$$

On remarquera que cette position est indépendante de la masse des boules; à ce titre, un régulateur quelconque pourrait être installé sur une machine donnée, et tous réglementeraient de la même manière la distribution. Cependant si l'on remarque en même temps que F est proportionnelle à m, on reconnaîtra que l'efficacité d'un régulateur, c'est-à-dire l'énergie avec laquelle il luttera contre les frottements et l'inertie du mécanisme, ou enfin sa rapidité d'influence dépendent de la masse des boules qui devra augmenter avec le degré d'importance de la machine.

288. Le régulateur ainsi constitué présente encore un défaut grave que je vais faire ressortir. Supposons que la machine serve à effectuer un ouvrage déterminé, pour la bonne exécution duquel il soit nécessaire de conserver une certaine vitesse ω, sauf des oscillations sans importance. Mais supposons aussi que l'on veuille effectuer cet ouvrage sur des proportions plus ou moins considérables, de manière à ce que le travail moteur, dont la dispensation est faite par le régulateur, doive varier en conséquence. On sera conduit à cette double condition, que la tige se tienne, sauf ses variations accidentelles, à une position α' constante, puisque ω doit l'être, et que d'autre part la distribution du moteur varie, et par suite aussi l'écartement α' qui la commande. Ces deux conditions sont contradictoires et impossibles à remplir avec le régulateur tel qu'il vient d'être décrit.

On parvient à y satisfaire en modifiant le dispositif. On s'arrange pour que la boule, au lieu de décrire dans le plan vertical un cercle de rayon l, parcoure une courbe diffé-

rente dont il faut d'abord reconnaître la nature. La condition d'équilibre peut s'écrire

$$l\cos\alpha' = \frac{g}{\omega^2};$$

Or, $l\cos\alpha'$ est la projection sur la verticale de l ou de la normale de la courbe; c'est donc sa sous-normale, et comme ω doit être constant, l'équation précédente exprime que la sous-normale est constante ou que la courbe est une parabole. Deux systèmes peuvent être employés pour assujettir les boules à décrire cette parabole.

Régulateur de Franke. — Un premier mécanisme permet d'atteindre rigoureusement ce résultat; mais il convient de dire qu'il a peu réussi en pratique (*Pl. XV, fig.* 235). Les boules sont reliées à des roulettes engagées sur des courbes fixes parallèles à la parabole, c'est-à-dire sur des développantes de la même parabole semi-cubique.

Régulateur Farcot. — Un second dispositif, qui n'est en principe qu'approximatif, réussit beaucoup mieux dans l'application (*Pl. XV, fig.* 236). Au lieu d'une parabole, on emploie un arc de son cercle osculateur pour un point intermédiaire de la portion parcourue. Il suffit alors de suspendre, comme dans le premier cas, la tige à un point fixe; mais ce point n'est plus sur l'axe de rotation, il est situé au delà; car on sait que le centre de courbure d'un point de la parabole est toujours situé de l'autre côté de son axe. Pour cette raison, l'appareil de M. Farcot porte aussi le nom de régulateur à tiges croisées.

289. *Régulateur de M. Léon Foucault.* — M. Léon Foucault vient de construire un nouvel appareil qui résout, avec une rigueur absolue et une extrême simplicité, le problème précédent.

Imaginons que le sommet inférieur du losange soit fixe

et que le sommet supérieur porte, au contraire, le manchon mobile; donnons de plus aux prolongements des côtés du losange qui portent les boules des longueurs égales à ces mêmes côtés. Dans ces conditions, les boules se trouvent dans le plan horizontal de l'articulation fixe pour toutes les déformations du losange; elles ne sortent donc pas de ce plan, et l'influence de la pesanteur se trouve supprimée (1). Il s'ensuit que son antagonisme avec la force centrifuge n'existant plus, la moindre vitesse de rotation aplatira complétement le losange dans le plan en question.

Pour éviter cet effet, on relie les boules à l'axe par des ressorts à boudin dont le point d'attache se trouve de l'autre côté de cet axe sur une carcasse qui tourne avec lui. Ils ont de plus une longueur telle, que leur extrémité naturelle se trouve sur l'axe, l'écartement r de la boule dans chacune de ces positions mesurant par cela même leur allongement. Il suit de là que l'action exercée par le ressort sur la boule aura pour expression Er, attendu que les forces élastiques peuvent être considérées comme proportionnelles aux déformations.

La boule peut géométriquement prendre toutes espèces de mouvements dans son plan; mais, en l'absence d'une cause précise, elle s'en tiendra au mouvement circulaire, le seul qui ne fasse pas naître de résistances passives ou d'inertie par le jeu du losange et de la distribution. La force centripète sera alors mesurée par $m\omega^2 r$, et par suite on aura

$$\omega = \sqrt{\frac{E}{m}},$$

valeur constante; ce qui montre que tous les écartements

(1) Avantage important pour les machines de navigation qui participent au roulis et au tangage du bâtiment.

s'accommoderont de la même vitesse de régime. Ainsi donc cette vitesse sera compatible avec tous les degrés de puissance de la machine, puisque celle-ci est réglée par l'écartement même.

L'appareil fonctionne néanmoins comme régulateur; car, si la vitesse normale ω vient à s'accroître subitement en devenant Ω, il faudrait, pour que la boule continuât à décrire le même cercle, qu'elle fût sollicitée par une force centrale $m\Omega^2 r$, tandis que cette action est seulement égale à Er ou $m\omega^2 r$. Elle sera donc impuissante à déterminer cette courbure, et les boules s'écarteront en fermant en partie l'admission. Mais, dès que la vitesse sera revenue par là à sa valeur normale ω, elles resteront dans leur nouvelle position jusqu'à ce qu'une nouvelle variation vienne à les en détacher.

On remarquera que la transmission de la boule au manchon se fait par l'intermédiaire d'un parallélogramme d'Evans (163) formé de la tige qui se meut entre l'axe et le plan horizontal, et qui est reliée à l'articulation fixe par un lien d'une longueur moitié moindre. Les vitesses des extrémités sont donc (155) en raison inverse de leurs distances à cette articulation, et, par suite, d'après le principe des vitesses virtuelles, les forces seront en raison directe de ces distances. Or, l'action exercée sur la boule varie déjà comme l'écartement; celle qui est développée sur le manchon sera, par conséquent, en raison de la hauteur de ce manchon au-dessus de l'articulation fixe.

290. *Régulateur de Flaud.*—Il se compose d'un losange articulé dont deux sommets portent des boules; un troisième est fixé sur l'axe, et le dernier est garni d'un manchon embrassé par la fourchette comme dans les appareils précédents (*Pl. XV, fig.* 237). La force centrifuge tend à écarter les boules et à aplatir le losange suivant celle de ses

diagonales qui est perpendiculaire à l'axe. La réaction d'un ressort à boudin tend, d'un autre côté, à le réduire à la diagonale dirigée suivant l'axe. De là un antagonisme variable avec la force centrifuge, qui rend l'appareil sensible aux changements de vitesse.

Pour trouver la position d'équilibre spontané, écrivons que le travail virtuel est nul pour le mouvement compatible avec la constitution de l'appareil. La force centrifuge est, comme ci-dessus,

$$m\omega^2 l \sin\alpha;$$

le chemin décrit par son point d'application est un arc de cercle $ld\alpha$. L'angle de ces deux directions est égal à α, puisqu'elles sont respectivement perpendiculaires à l'axe et à la tige. Le travail total a donc pour valeur

$$2m\omega^2 l^2 \sin\alpha\cos\alpha d\alpha;$$

car il est le même pour chacune des deux boules. Quant à la force du ressort, elle peut être représentée par Ex, si x désigne l'écartement de la glissière à partir de sa position naturelle, lorsque les boules sont sur l'axe et le ressort sans tension. Son travail sera donc

$$Exdx,$$

et l'équation d'équilibre

$$2m\omega^2 l^2 \sin\alpha\cos\alpha d\alpha = Exdx;$$

mais on a

$$x = 2l(1-\cos\alpha)$$
$$dx = 2l\sin\alpha d\alpha,$$

et la formule devient

$$2l^2 \sin\alpha d\alpha[m\omega^2\cos\alpha - 2E(1-\cos\alpha)] = 0,$$

ce qui permet de la décomposer ainsi :

$$(m\omega^2 + 2E)\cos\alpha - 2E = 0,$$
$$\sin\alpha = 0;$$

d'où les trois racines

$$\cos\alpha' = \frac{2E}{2E + m\omega^2}, \quad \alpha'' = 0, \quad \alpha''' = \pi.$$

La première conviendra toujours à la question, car elle ne peut devenir imaginaire.

291. *Régulateur Duvoir.* — L'organe essentiel est un *anneau de Saturne* pouvant tourner autour d'un de ses diamètres fixé à angle droit sur l'axe, et emporté par celui-ci dans sa rotation (*Pl. XV, fig.* 238). La force centrifuge tend à mettre l'anneau dans un plan perpendiculaire à l'axe, l'action d'un ressort à le coucher sur l'axe, d'où un antagonisme variable analogue au précédent.

La théorie de cet appareil est fort compliquée et exige, pour être traitée en rigueur, l'introduction des intégrales elliptiques (1); je me contenterai d'en extraire les propriétés suivantes : l'anneau a deux positions d'équilibre; pour une vitesse infinie, l'une se trouve à angle droit sur l'axe et l'autre couchée sur lui; la vitesse allant en décroissant, ces positions se rapprochent et, pour une valeur déterminée, elles se confondent sous une certaine inclinaison; la vitesse diminuant encore, l'équilibre n'est plus possible de cette manière, et l'anneau retombe sur l'axe. Ajoutons que la position écartée de l'axe est toujours stable et la position voisine instable. Cependant celle-ci devient stable lorsqu'elle est couchée sur l'axe, pour des vitesses comprises au-dessous de la limite.

Enfin, dans le cas particulier, mais le plus fréquemment réalisé, où le ressort est sans tension, lorsque l'anneau s'appuie sur l'axe, l'angle limite est nul; de sorte que la position inférieure est toujours couchée sur l'axe, instable pour

(1) *Mémoire sur le régulateur Duvoir*, par J.-N. Haton de la Goupillière, *Annales des Mines*, 5e série, t. XVIII, p. 575.

les vitesses supérieures à la vitesse limite et stable pour les autres.

§ II.

MODÉRATEURS A RESSORT.

292. Lorsque le moteur s'accélère, le changement de vitesse ne se transmet au mécanisme que par un accroissement dans les efforts mutuels des pièces. Si donc on interpose dans la transmission un ressort, il accusera cette variation par sa flexibilité et constituera l'élément essentiel d'un appareil sensible aux variations de vitesse.

Tel est le principe général des modérateurs du second genre. Il peut être, du reste, employé sous des formes très-différentes.

293. *Régulateur Poncelet.* — L'arbre moteur A fait tourner à l'aide de la roue dentée B une autre roue C calée sur un second arbre D (*Pl. XV, fig.* 239). Cette roue agit par l'intermédiaire d'une flasque élastique E et d'un taquet F sur une autre roue G folle sur le même axe. Cette dernière engrène avec un long pignon H monté sur le premier axe et fonctionnant comme glissière sensible.

Si le mouvement s'accélère, C tend à gagner de l'avance sur G, le ressort fléchit momentanément, et il s'établit un écart relatif entre ces deux roues et par suite entre B et H qui engrènent avec elle. Mais B est calée et H assemblée à vis sur l'arbre A ; leur écart relatif nécessite donc une translation de la glissière dans un certain sens. Un ralentissement de la machine produira le mouvement opposé, et par conséquent le manchon H est sensible aux variations de la marche.

294. *Régulateur Larivière.* — Dans ce régulateur, le

ressort est un matelas d'air. On l'utilise de la manière suivante (*Pl. XV, fig.* 240).

Le mouvement de la machine fait marcher une petite pompe pneumatique qui extrait l'air d'un cylindre A par un tube B. Cet air rentre incessamment par le sifflet C. Cependant on comprend que cette rentrée s'opère d'une manière à peu près uniforme qui ne se modifie pas instantanément suivant les variations de la marche, tandis que l'épuisement fonctionne exactement comme la machine. Pour ces causes, la pression intérieure tend à diminuer pendant les accélérations et à se rétablir aux ralentissements. Or, le cylindre, foncé d'un côté, n'est fermé de l'autre que par un piston D en contact avec l'atmosphère. Celui-ci s'élèvera donc ou s'abaissera suivant les changements de pression ou de marche, et il suffit de le mettre en connexion avec la distribution.

Un tiroir E est employé à fermer plus ou moins le sifflet de rentrée C et à rendre ainsi le régulateur plus ou moins sensible.

Régulateur Molinié. — Il ne diffère du précédent qu'en ce que la pompe agit en refoulant de l'air dans le cylindre. Il fonctionne ainsi d'une manière identique en principe, mais en sens inverse.

295. *Régulateur hydraulique.* — Je rattacherai encore à ce genre de régulateurs un dernier exemple, bien qu'il ne renferme aucun ressort, mais parce que son principe est à peu près identique à celui des deux précédents (*Pl. XV, fig.* 241).

La machine manœuvre la tige A d'une pompe B immergée dans une bâche C. Elle en élève l'eau par un tuyau D dans un réservoir supérieur E; cette eau retombe par son poids dans la bâche inférieure à travers un ajutage F; l'écoulement s'opère comme tout à l'heure d'une manière

à peu près uniforme, tandis que l'ascension se ressent directement des changements de marche. Le niveau de la bâche supérieure tend par suite à monter pendant les accélérations et à baisser aux ralentissements. Si donc on y place un flotteur G, sa tige H agira d'une manière variable sur le balancier K qu'il suffira de mettre en connexion avec la distribution.

Un robinet F, remplaçant le sifflet des régulateurs à air, réglemente l'écoulement et sert ainsi à rendre l'appareil plus ou moins sensible.

CHAPITRE XIX.

INDICATEURS CINÉMATIQUES.

§ I.

COMPTEURS.

296. Nous comprenons sous la dénomination d'*indicateurs* des appareils qui ne sont nécessaires à la marche d'aucune machine en particulier, mais qui permettent de déduire de l'observation la mesure de certains coefficients, ou la détermination de certaines lois utiles pour l'art du mécanicien (XXVI).

Les quantités qui intéressent la Mécanique sont l'espace linéaire ou angulaire, le temps, la force, la masse. J'écarte la description des appareils qui servent à une mesure rigoureuse des longueurs, des angles ou du temps, et dont la vraie place se trouve dans un Traité de Physique ou d'Astronomie. Je ne m'attacherai qu'aux appareils d'observation de la Mécanique appliquée.

Nous en distinguerons plusieurs catégories, d'après le but qu'ils sont destinés à remplir.

PREMIÈRE CATÉGORIE. — *Vitesses.* — *Compteurs.*

DEUXIÈME CATÉGORIE. — *Lois de mouvement.* — *Enregistreurs*

TROISIÈME CATÉGORIE. — *Travail.* — *Dynamomètres.*

QUATRIÈME CATÉGORIE. — *Pressions.* — *Manomètres.*

CINQUIÈME CATÉGORIE. — *Masses.* — *Balances.*

COMPTEURS. — Nous appelons *compteurs* les appareils qui servent à la mesure des vitesses. Nous distinguerons parmi eux trois genres, d'après les circonstances de leur emploi.

PREMIER GENRE. — *Vitesses de rotation.*

SECOND GENRE. — *Vitesses de projectiles.*

TROISIÈME GENRE. — *Vitesses de fluides.*

297. VITESSES DE ROTATION. — *Compteurs décimaux.* — On les emploie pour mesurer la vitesse angulaire uniforme d'un arbre tournant, ou le nombre de tours effectués dans un temps connu. Ils se composent d'une petite boîte en cuivre qui porte sur sa face antérieure des cadrans gradués de 1 à 10. Ceux-ci sont parcourus par des aiguilles montées sur des arbres tournants dont le premier est mis en communication directe avec la rotation proposée. Désignons-les en allant de droite à gauche par A, B, C,.... On monte sur chacun d'eux des taquets a, b, c,... qui engrènent une fois par tour avec des roues β, γ,... de dix dents montées également sur ces arbres. Dix tours de A feront donc faire un tour à B, cent de A en donneront dix de B, c'est-à-dire un de C, et ainsi de suite. Les cadrans A, B, C,..., marqueront par conséquent les unités, dizaines, centaines,... du nombre de tours, qu'on lira avec un peu d'habitude en allant de gauche à droite comme on énonce un nombre écrit en chiffres.

M. Saladin a remplacé les roues d'une seule dent par des vis sans fin, ou par des plateaux à spirale (53, note). Ces appareils jouissent en effet comme le taquet tournant de cette propriété, qu'un tour entier de l'une des pièces ne fait passer qu'une dent de l'autre.

298. *Gyromètre de Fabre.* — M. Fabre a utilisé pour le même objet un phénomène physique connu sous le nom de magnétisme en mouvement. Si un disque de cuivre

tourne sous une aiguille aimantée, il la dévie de plus en plus à mesure que la vitesse augmente, et il finit même par imprimer à l'aiguille une rotation continue. Sans atteindre ce point, on pourra juger par l'écart de l'aiguille du degré de rapidité du plateau que l'on aura mis en communication directe avec la rotation proposée. Il suffira de graduer cet appareil par comparaison, en se servant de vitesses de rotations connues.

299. VITESSES DE PROJECTILES. — *Tambour de Mattei.* — Pour déterminer la vitesse d'un projectile, on peut employer un tambour dont les deux fonds sont en papier et portent un système de rayons équidistants qui se correspondent dans les mêmes plans méridiens. Si le tambour est immobile, la balle traversera sur deux rayons homologues. Mais si on l'anime d'une rotation rapide et connue, ce qui est facile avec des répétitions d'engrenages ; pendant le temps que la balle mettra à parcourir l'intervalle des fonds le tambour tournera d'un certain angle qui sera fourni par les rayons des deux trous de balle. La mesure de cet angle fera connaître le temps, et celle de la longueur des cylindres la vitesse de projection.

300. *Pendule balistique.* — On emploie aussi pour le même objet le pendule balistique (*Pl. XV, fig.* 242). Il consiste en un mortier rempli de matières pénétrables et suspendu de manière à pouvoir osciller autour d'un axe. On y lance le projectile à bout portant et on juge de la vitesse par l'écart qu'il imprime au pendule. Cet angle se mesure au moyen d'un arc gradué dont le centre se trouve sur l'axe de suspension. Un curseur le parcourt à frottement un peu dur sous l'impulsion d'une pointe fixée au pendule et reste dans la position extrême où il a été amené.

La théorie de cet appareil exige des développements qui ne pourraient trouver place ici, et que l'on trouve dans

les Traités de Mécanique rationnelle. Je me bornerai à en rappeler les résultats.

La formule qui relie la vitesse v à l'écart α est de la forme

$$v = C \sin \frac{\alpha}{2},$$

C désignant une constante qui dépend des éléments du pendule et aussi du poids p du projectile sous la forme

$$C = A + \frac{B}{p}.$$

Il est de plus essentiel d'éviter le contre-coup sur l'axe de suspension pour lui conserver une certaine délicatesse. La condition à remplir pour cela est fort simple. L'axe du mortier doit être dans la position d'équilibre horizontal et situé à une distance du point de suspension égale à la longueur du pendule simple qui oscillerait dans le même temps que l'appareil.

301. *Pendule électro-balistique.* — L'emploi de l'électricité pour mesurer les intervalles de temps extrêmement courts remonte à 1840 et à M. Wheatstone. En 1843, MM. Constantin et Bréguet construisirent un *chronoscope* fondé sur ce principe, et M. Pouillet s'en servit pour mesurer la durée du trajet d'une balle dans un fusil de munition. M. le capitaine Ravez et M. Siemens ont encore donné des appareils de ce genre. Enfin M. le commandant Martin de Brettes a résumé et perfectionné ces divers moyens dans son pendule électro-balistique.

Le pendule se meut devant un papier fixé sur une plaque de cuivre. Il porte un petit style qui se meut assez près du papier pour que l'étincelle puisse jaillir entre la plaque et lui, en perçant le papier à l'instant voulu. Il porte en outre un fer doux qui sert à le maintenir au repos dans

une position horizontale par son attraction pour un électro-aimant. Ce dernier reçoit le courant, et par suite la vertu magnétique, de fils qui comprennent dans leur circuit le canon de fusil, de manière à fermer ce circuit quand le chien est bandé, et à le rouvrir à l'instant de sa chute. Lors donc que l'on presse la détente, l'attraction cesse et le pendule commence son mouvement. Voyons ce qui arrive dans la suite de l'expérience.

Sur le trajet de la balle on a ménagé deux cibles à 20 et 30 mètres, par exemple, de la bouche à feu. Elles sont formées de cadres suspendus par deux ficelles, et garnis d'un fil métallique continu qui s'étend d'un bout à l'autre en forme de grille, trop resserrée pour que la balle puisse passer sans briser au moins un des barreaux. Or, ces fils, qui font partie l'un et l'autre du circuit d'appareils d'induction de Ruhmkorff, communiquent, l'un avec la plaque de cuivre porte-papier, l'autre avec le pendule. Le passage de la balle en brisant le premier interrompt le courant inducteur, le courant induit se manifeste, l'étincelle jaillit et perce le papier. Le même phénomène a lieu, en sens inverse, au passage à la seconde cible, et le papier se trouve troué de nouveau.

On retrouve ainsi après coup la trace des positions du pendule aux passages à travers la cible. La formule de son mouvement permettant d'évaluer la durée qui les sépare, on connaîtra le temps employé pour franchir l'intervalle des cibles, et par suite la vitesse du projectile.

En conservant le principe de la mesure du temps par l'intervalle des deux traces d'étincelles, MM. Martin de Brettes et Hardy ont récemment modifié la disposition de l'appareil. Dans ce nouveau *chronographe*, l'étincelle jaillit entre la plaque porte-papier et une aiguille tournante dont la rotation est régularisée par un pendule conique. On arrive par là, en se servant du vernier pour améliorer les lec-

nécessaire en effet de ne commencer à évaluer le nombre de tours que lorsque la vitesse de régime est bien établie.

Anémomètre Combes. — Un appareil analogue, construit, d'après les indications de M. Combes, en ivoire et avec une grande légèreté, sert à apprécier la vitesse des courants d'air dans l'intérieur des travaux de mines.

306. *Lochomètre.* — L'organe essentiel du lochomètre est l'hélice, que l'on peut considérer comme dérivant du moulinet de Woltmann, en ce que les diverses aubes se disposent à la suite l'une de l'autre, au lieu d'être implantées sur le même point de l'arbre. Cette hélice est emprisonnée dans un tube en U renversé, dont les deux branches verticales se recourbent dans le même plan et en sens contraire l'une de l'autre. Ce tube, ouvert aux deux extrémités, est placé dans le plan vertical de symétrie d'un navire. L'eau le traverse dans le mouvement relatif qu'elle possède par rapport à la coque en mouvement. La rapidité variable de cette vitesse de passage se communique à l'hélice, et de celle-ci à un compteur qui note avec une précision satisfaisante le chemin parcouru.

§ II.

ENREGISTREURS.

307. Les *enregistreurs* sont des appareils manœuvrés par l'organe lui-même dont il s'agit d'apprécier la loi de mouvement. Ils fournissent le tracé d'une courbe dont l'examen renseigne après coup sur les circonstances du mouvement.

Dans un premier genre, la courbe est tracée matérielle-

ment et subsiste après l'expérience. Dans un autre, elle ne constitue qu'une apparence lumineuse.

PREMIER GENRE.— *Enregistreurs à courbe.*

SECOND GENRE. — *Enregistreurs optiques.*

308. ENREGISTREURS A COURBE. — La courbe est tracée, soit par un crayon sur une bande de papier, soit par une pointe sèche sur un disque enduit de noir de fumée.

Ces appareils servent particulièrement pour des mouvements d'une rapidité telle, qu'ils échappent à l'observation directe, comme la chute d'un chien de fusil, l'élévation de la soupape du bélier hydraulique, etc. Il est, d'après cela, nécessaire d'apporter une grande précision dans l'appréciation du temps, et on éprouve à cet égard une grande difficulté, attendu que les appareils d'horlogerie que l'on emploie pour produire de prétendus mouvements uniformes ne fournissent au fond que des mouvements périodiques (251). A la vérité, la période est très-courte, mais la durée du mouvement proposé lui étant comparable, l'appareil ne peut dans ces conditions servir d'une manière satisfaisante à la mesure du temps.

On lève cette difficulté par l'emploi du diapason. En même temps que la pointe traçante marque la courbe principale sur la bande de papier qui se dérobe d'un mouvement à peu près uniforme, une seconde pointe, fixée au diapason que l'on a mis en vibration sonore, marquera une courbe accessoire de forme sinueuse. Comme on sait que les petits mouvements des corps élastiques sont isochrones, il en faut conclure que des intervalles de temps égaux se sont écoulés entre les instants auxquels ont été marqués les points *maxima* et *minima*. On obtient ainsi pour la courbe principale une série d'ordonnées (ou de rayons vecteurs, suivant le mode de tracé) qui correspondent à coup sûr à des intervalles de temps égaux, bien que les apparences en avertis-

sent ordinairement assez mal sur la figure. On construira alors, pour plus de clarté, une nouvelle épure en reportant à des intervalles égaux ces ordonnées ou ces rayons vecteurs. On tracera ainsi, après coup et par points, la courbe qui eût été obtenue directement, si l'on avait pu disposer d'un mouvement rigoureusement uniforme.

Pour donner une idée du degré de précision que ce procédé permet d'atteindre, supposons qu'on se serve du diapason normal qui exécute 896 vibrations par seconde à 15 degrés centigrades ; la durée d'une vibration sera $\frac{1}{896}$ de seconde ; comme, du reste, on est sûr de ne pas se tromper d'une demi-division, l'erreur possible est de $\frac{1}{1792}$ de seconde. On remarquera, de plus, que rien n'empêche de se servir d'un diapason plus aigu, pour pousser plus loin l'approximation.

309. On a employé un appareil analogue pour compter les vibrations des bouches à feu. On leur adapte pour cela un style qui trace sur le cylindre une courbe sinueuse. Pour éviter la superposition de ces courbes après un tour complet, on peut attribuer au cylindre, au lieu d'une rotation, un mouvement héliçoïdal qui met mieux en évidence les différentes spires de la courbe.

On peut encore se servir de ce procédé pour comparer les nombres de vibrations des intervalles musicaux en faisant tracer des courbes à plusieurs diapasons sur une même plaque, dont le mouvement peut alors être à peu près quelconque.

Le même principe a été encore appliqué pour l'étude des mouvements du cœur, à l'aide d'un instrument nommé *sphygmographe,* inventé par Vierordt et perfectionné par MM. Buisson et Marey. Les battements sont transmis par des tubes pleins d'air à une membrane très-élastique, et de là à une répétition de leviers destinés à en amplifier l'ex-

cursion. Une ou plusieurs pointes traçantes sont manœuvrées par ces leviers devant un cylindre tournant, sur lequel ils tracent la courbe représentative.

310. *Appareil de M. le général Morin.* — Cet appareil a été imaginé pour la vérification des lois de la pesanteur. La formule des hauteurs étant

$$y = \frac{1}{2} g t^2,$$

et les abscisses se succédant d'un mouvement uniforme,

$$x = vt,$$

leur relation

$$x^2 = \frac{2v^2}{g} y$$

montre que la courbe tracée par une pointe pesante dans sa chute sera une parabole.

Pour faciliter l'application du principe, au lieu de faire avancer la bande de papier par une translation horizontale, on l'enroule sur un cylindre qui tourne sur son axe, et on laisse tomber la pointe le long d'une génératrice. C'est après le déroulement que la courbe prend la forme d'une parabole plane.

311. *Appareil d'Eytelwein.* — Cet appareil a été imaginé pour apprécier la loi de mouvement de la soupape du bélier hydraulique, qui se soulève avec une extrême rapidité et des alternatives de repos aux deux extrémités de la courbe.

Pour cela on fait porter à la tige la pointe traçante et on dispose en regard un rouleau A qui sert seulement de point d'appui à la bande de papier (*Pl. XV, fig.* 245), celle-ci est entraînée du rouleau B par le rouleau C manœuvré par le mouvement d'horlogerie D.

On remarquera l'interposition de la fusée conique E qu'il convient d'introduire dans tous les appareils à bande. En effet, si on admet l'uniformité de la rotation de D, ou de la traction de la corde, c'est-à-dire celle de la vitesse angulaire de C, on n'obtiendra pas pour cela une translation régulière de la bande, car elle est le produit de cette vitesse angulaire constante par la distance à l'axe, qui se compose du rayon de C plus la somme des épaisseurs enroulées à chaque tour. On évite cet inconvénient en employant le tronc de cône E dont le petit et le grand rayon sont égaux à ceux de C avant et après l'enroulement de n épaisseurs. On trace une spirale de n tours sur ce cône et on y engage la corde. On voit que dans ces conditions elle agira constamment à la même distance de l'axe que le papier, et comme son mouvement est uniforme, il en sera de même de celui de la bande, la vitesse angulaire de C allant sans cesse en diminuant.

312. *Disque tournant de M. le général Morin.* — Cet appareil a été employé pour la vérification des lois du frottement et pour l'étude du mouvement d'un chien de fusil.

On adapte un plateau à l'arbre dont on veut déterminer la loi de rotation (*Pl. XV*, *fig.* 246). Un mouvement d'horlogerie fait tourner suivant le petit cercle NN' une pointe traçante dans l'espace absolu. Si donc le plateau reste immobile, le style y marquera ce cercle; mais si le plateau marche, il tracera une certaine courbe MM'. On peut d'après cette ligne retrouver les angles dont l'arbre a tourné pour des intervalles de temps donnés, de manière à en déduire la loi du mouvement.

En effet, lorsque le style a marqué le point M, il était à la distance MO du centre du plateau, et comme ce centre est fixe, il se trouvait dans l'espace sur le cercle MN. Mais

en réalité ce style décrit le petit cercle NN'. Il occupait donc à l'instant en question la position N. Il était de même en N' lorsqu'il a marqué le point M', et par conséquent, pendant qu'il s'est déplacé de NN', c'est-à-dire pendant le temps marqué par cette rotation uniforme, le plateau a tourné de l'angle MOM'.

313. *Tachomètre.* — Comme disposition, le tachomètre ne diffère pas du régulateur de Flaud (290) (*Pl. XV, fig.* 237), mais ses fonctions sont très-différentes. On s'en sert dans le contrôle des chemins de fer pour constater qu'à aucun instant la vitesse du train n'a dépassé la limite réglementaire.

A cet effet, l'extrémité des ressorts porte une pointe traçante qui se rapproche d'autant plus du centre du plateau que les boules s'écartent davantage, c'est-à-dire que la vitesse de l'arbre ou celle du train vont elles-mêmes en croissant. Le plateau tournant uniformément au-dessous, la courbe ainsi tracée indique par la variation de son rayon vecteur celle de la vitesse. Le contrôle se réduit alors à vérifier qu'elle ne pénètre pas au dedans d'un certain cercle.

314. Enregistreurs optiques. — Dans ces nouveaux appareils la courbe n'existe plus matériellement. Elle n'est que la trajectoire d'un point lumineux animé d'un mouvement rapide, et son apparence tient à la persistance de l'impression des objets lumineux sur la rétine.

Kaléidophone de Wheatstone. — On peut rattacher à ce principe le *kaléidophone,* constitué simplement d'une petite sphère étamée qui présente, dans toutes ses positions, un point brillant et qu'on installe à l'extrémité d'une tige élastique pour en étudier les vibrations. La section de cette tige est rectangulaire. Il s'ensuit que des déviations imprimées séparément dans les plans de symétrie produiront

des vibrations dans ces mêmes plans. Tout autre mode de déviation participera plus ou moins de l'un ou l'autre, et déterminera une vibration curviligne qui sera la résultante des deux premières et que la courbe brillante mettra en évidence.

Miroirs vibrants de M. Lissajoux.—Dans une étude très-complète dont nous ne pouvons indiquer ici que le principe, M. Lissajoux a employé deux diapasons qui portent des miroirs sur l'une de leurs branches. Si un point lumineux se reflète dans un de ces miroirs, il produira une image qui, dans le repos, sera un point, et qui se déplacera en ligne droite lorsque le diapason vibrera dans son propre plan. Si cette image se reflète dans le miroir du second diapason, et que celui-ci soit au repos, il n'y aura rien de changé; s'il vibre dans le même plan que le premier, l'image éprouvera un déplacement rectiligne qui sera la somme ou la différence des deux ; enfin, si le second diapason est placé dans un plan rectangulaire, l'image participera des deux déplacements composants et prendra un mouvement curviligne.

La nature de la courbe dépendra de la tonalité relative ou du rapport des nombres simultanés de vibrations et aussi de la phase de cette vibration, c'est-à-dire de la coïncidence ou du degré de non-concordance des extrémités de chaque excursion.

M. Lissajoux a imaginé également un appareil ingénieux qui trace les courbes résultant des vibrations distinctes en abscisse et en ordonnée pour toutes les combinaisons de tonalité et de phase. On se le représentera en imaginant deux axes reliés par des engrenages mobiles que l'on peut remplacer à volonté par d'autres présentant un rapport différent de vitesses, et par suite de nombres de vibrations par seconde dans la transmission qu'ils produisent. Ces arbres portent en outre des excentriques circulaires dont les

cadres se meuvent dans des sens qui sont pour l'un horizontal et pour l'autre vertical, et avec des lois de mouvement que nous savons être sinusoïdales (72) comme celles des corps élastiques, sonores ou lumineux qui forment l'objet de cette étude. Enfin le calage des excentriques est variable, ce qui permet de modifier la phase relative des deux vibrations. Les deux cadres portent des rainures rectilignes perpendiculaires à leur mouvement; la pointe traçante engagée dans ces rainures participe forcément aux deux translations et prend le mouvement résultant.

CHAPITRE XX.

INDICATEURS DYNAMIQUES.

§ I.

DYNAMOMÈTRES.

315. Les *dynamomètres* sont des appareils destinés à la mesure du travail. Ce terme a été détourné par là de sa véritable signification. Il désignait dans le principe des appareils à ressort dont il sera question plus tard (328) et qui servent à apprécier l'intensité des forces. Aujourd'hui le mot est presque exclusivement réservé pour la mesure du travail.

Nous distinguerons dans cette catégorie deux genres très-différents :

PREMIER GENRE.— *Dynamomètres à ressort.*

SECOND GENRE. — *Dynamomètres à frottement.*

316. DYNAMOMÈTRES A RESSORT. — GÉNÉRALITÉS. — Les dynamomètres de ce genre présentent trois parties principales : un organe sensible aux variations de la force, un organe qui participe aux variations du déplacement, et en outre quelques pièces accessoires dont je parlerai plus loin.

Organe sensible aux variations de la force. — Cet organe est un ressort, et on se fonde sur ce principe que les petites déformations des corps élastiques sont proportionnelles aux efforts qui les produisent (466).

Ce ressort peut être du reste une hélice à boudin, comme dans l'indicateur de Watt (320); une simple flasque d'épaisseur décroissante, comme dans la manivelle dynamométrique (319) ; un ressort tel que ceux des voitures, comme dans le dynamomètre de traction (319). La forme de ces derniers est très-rationnelle. C'est celle des solides d'égale résistance (chap. XXVIII) déterminée pour offrir dans toutes ses parties la même fatigue. Par là on augmente la sensibilité du ressort en le dégageant de tout ce qui n'est pas nécessaire à sa solidité; il serait inutile en effet de le renforcer sur un point plus que sur un autre, attendu que ce serait toujours au point le plus faible qu'aurait lieu la rupture.

317. *Organe sensible aux variations du déplacement.* — Un premier mode consiste dans l'emploi d'un appareil à bande qui se déroule proportionnellement à l'espace parcouru. L'abscisse représente l'espace, et l'ordonnée ou le déplacement du style qui est porté sur le ressort, la force ; le travail sera donc l'aire de la courbe. On l'obtiendra par les formules de quadratures approchées de Simpson, du général Poncelet, etc., ou plus simplement encore en découpant le papier et le pesant. On monte ordinairement sur la partie fixe un second style qui théoriquement devrait tracer l'axe des abscisses, et qui en réalité fournit une ligne un peu irrégulière, en raison des mouvements de trépidation. C'est alors l'aire comprise entre les deux courbes qu'il convient de mesurer.

Un second mode consiste dans l'emploi d'un galet totaliseur (10). Nous avons vu que dans cet organe le nombre de tours de la roulette est en raison composée de la rotation du plateau ou du déplacement, et de l'écartement du centre sous l'influence du ressort, c'est-à-dire de la force. Ce nombre sera donc proportionnel au travail.

L'emploi du galet totaliseur est assez peu pratique, attendu que la possibilité du glissement ôte toute valeur à ses indications. M. Laboulaye a proposé de lui substituer l'organe essentiel de l'arithmaurel (148), qui sert, comme nous l'avons vu, à effectuer une multiplication, et qui fournirait d'après cela le produit de la force par l'espace.

Quel que soit le mode employé, une expérience directe est toujours nécessaire pour pouvoir interpréter le résultat numérique et pour convertir en kilogrammètres le nombre de mètres carrés ou le nombre de tours fournis par l'appareil. A cet effet on tendra le ressort d'une manière constante par un poids connu. On décrira un chemin mesuré d'avance, et on en déduira facilement le travail développé. La lecture obtenue sur l'appareil fera alors connaître le rapport de conversion de ses indications en kilogrammètres.

318. *Organes de connexion.* — On emploie pour la connexion du dynamomètre et de la machine deux modes différents. On peut d'abord l'intercaler entre la force motrice et la machine : c'est le cas des dynamomètres de traction ou de rotation (319). Il doit être alors construit solidement pour résister à cet effort, et sera par suite d'autant moins sensible. On peut au contraire l'installer à part, comme dans l'indicateur de Watt ou de Clair (320). On lui donne alors plus de légèreté et de sensibilité.

Au point de vue de l'espace, la connexion doit nécessairement s'effectuer à l'aide d'organes de transmission uniforme, c'est-à-dire de rapport de vitesse constant. Nous en avons rencontré un grand nombre. Les plus employés pour cet usage sont les engrenages et les courroies sans fin. Je rappellerai que pour les appareils à bande, l'interposition d'une fusée régulatrice est nécessaire (311).

Il est enfin indispensable d'établir pour la connexion de

l'espace un embrayage, afin de n'établir cette relation et de ne commencer les mesures que lorsque l'état de régime est définitivement établi, en écartant les irrégularités de la mise en marche.

319. Exemples. — *Dynamomètre de traction.* — Cet appareil, dû à M. le général Poncelet, sert pour les charrues et les fourgons d'artillerie (*Pl. XVI, fig.* 247). Le ressort est analogue à celui des voitures, et transmet au véhicule la traction du moteur. L'appareil est à bande, la connexion par courroie. L'embrayage est un manchon (232).

Manivelle dynamométrique. — Ce système, dû à M. le général Morin, est employé pour apprécier le travail de l'homme à la manivelle (*Pl. XVI, fig.* 248). Le ressort est une flasque prise dans un cadre qui figure celui de la manivelle et serait fou sur l'arbre sans la présence de la flasque qui transmet l'effort. L'appareil est à bande, porté sur le bras de la manivelle même. La connexion est un engrenage épicycloïdal, l'embrayage un manchon.

Dynamomètre de rotation. — On l'emploie pour les grandes machines de rotation (*Pl. XVI, fig.* 249). Le ressort est un arc spiral pris dans la jante d'une poulie et transmettant la force; l'appareil est à bande ou à totaliseur, la connexion est un engrenage épicycloïdal; l'embrayage s'effectue par le passage de la courroie mobile d'une poulie ordinaire sur la poulie dynamométrique (237).

320. *Indicateur de Watt.* — Il est destiné aux machines à vapeur (*Pl. XVI, fig.* 250). On l'installe à part sur une tubulure ménagée tout exprès dans le fond du corps de pompe. Un simple robinet sert alors d'embrayage. Le ressort est à boudin pris dans un cylindre métallique; il bute sur le fond et porte un petit piston qui reçoit la pression de la vapeur. L'appareil est à bande et ordinairement réduit à un seul tour de papier qu'on enroule autour d'un cylindre

oscillant. Celui-ci est tiré dans un sens par une cordelette attachée au balancier ; un ressort intérieur le ramène quand le balancier redescend. Les deux arcs de la courbe correspondant à la pression motrice dans la première demi-course, et à la contre-pression du condenseur dans la seconde, se trouvent ainsi disposés l'un au-dessous de l'autre. Le travail effectif, différence des deux, sera donc représenté par l'aire intérieure de la courbe fermée. Pour se mettre à l'abri d'une erreur accidentelle, on laisse faire un assez grand nombre de courses dont les traits se superposent, et on découpe une ligne moyenne.

Indicateur de Clair. — Cet appareil ne diffère du précédent qu'en ce que le mouvement de la bande est rendu progressif comme à l'ordinaire au lieu d'être alternatif. Par là on évite la confusion qui résulte de la superposition des tracés. Pour y arriver, on dispose sur l'axe oscillant des saillies qui figurent ce qui resterait d'une vis triangulaire, si on la coupait par une vis de sens contraire montée sur le même noyau ; puis on fait engrener cette pièce avec deux portions de tore filetées comme les écrous de chacune de ces vis (*Pl. XVI, fig.* 251). Chaque oscillation de l'axe imprime à ces roues deux rotations contraires et qui changent chacune de sens en même temps que l'axe. Ces roues agissent sur l'axe de l'appareil à bandes par l'intermédiaire de deux encliquetages Dobo, disposés en même sens (380). Par là elles n'agissent sur cet axe que dans un même sens, et de plus il y en a toujours une et une seule qui transmet le mouvement.

321. DYNAMOMÈTRE DE FROTTEMENT. — *Frein de Prony.* — L'emploi de cet appareil nécessite la suppression momentanée de la résistance utile à laquelle est appliquée la machine. On y supplée en entourant l'arbre d'un manchon muni d'une tige que l'on saisit entre deux obstacles fixes

de manière à l'empêcher de tourner avec l'arbre (*Pl. XVI, fig.* 252). On serre les clefs jusqu'à ce que l'on ait réduit la marche à son état de régime ordinaire; puis on détache la tige de l'appui contre lequel elle bute, en plaçant des poids marqués dans un plateau de balance suspendu à son extrémité. De cette manière le frein se trouve en équilibre sous l'influence de ces poids et de l'action qu'il reçoit de la machine.

La force en chevaux s'obtient en divisant par 75 le nombre de kilogrammètres qui est développé en une seconde. Comme le mouvement est de rotation, ce travail sera le produit du déplacement angulaire $\frac{2n\pi}{60}$ (si n est le nombre de tours par minute) par la somme des moments pris par rapport à l'axe, étendue à toutes les forces qui sont développées par l'arbre sur le manchon. Comme du reste l'équilibre du manchon, qui ne peut que tourner autour de l'axe, exige que la somme algébrique de tous les moments qui le sollicitent soit nulle, nous pourrons remplacer la somme précédente par le moment des poids titrés en y comprenant le levier lui-même. Nous le représenterons par $(P + \Pi)\,p$, en désignant par p la longueur du levier horizontal depuis le point d'attache du plateau de balance jusqu'à l'aplomb de l'axe de l'arbre, par P les poids marqués et par Π le poids du levier appliqué, non à son centre de gravité, mais à l'extrémité, c'est-à-dire réduit dans le rapport des bras de levier. On mesurera directement Π dans une expérience préliminaire faite une fois pour toutes. Pour cela, laissant le manchon libre de tourner autour de l'axe, on suspendra son extrémité à une corde passant sur une poulie et supportant un plateau de balance au moyen duquel on l'équilibrera par le poids Π.

On obtiendra ainsi l'expression de la force en chevaux,

$$\frac{1}{75}\cdot\frac{2n\pi}{60}(P + \Pi)p,$$

c'est-à-dire

$$0{,}00138.p.n(P+\Pi),$$

dans laquelle p et Π sont deux constantes particulières au frein, n et P les résultats de chaque expérience.

§ II.

MANOMÈTRES.

322. Les manomètres sont des appareils destinés à la mesure de la pression des fluides. Lorsque ce fluide est l'atmosphère terrestre, l'instrument est appelé *baromètre* et sa théorie appartient à la Physique. Je ne m'attacherai ici qu'aux pressions de masses fluides emprisonnées.

Nous distinguerons trois genres de manomètres d'après le principe de leur construction :

PREMIER GENRE. — *Manomètres hydrostatiques.*

DEUXIÈME GENRE. — *Manomètres à contre-poids.*

TROISIÈME GENRE. — *Manomètres élastiques.*

323. MANOMÈTRES HYDROSTATIQUES. — Le principe de ces appareils consiste à mettre en rapport, par le contact immédiat ou au moyen d'un matelas d'air, le fluide proposé avec un liquide pesant, dont la face libre est baignée par l'atmosphère. L'équilibre de cette colonne liquide est exprimé par l'équation

$$p = p_0 + \varpi h.$$

Dans cette formule, p désigne la pression qui s'exerce dans un plan horizontal situé à la hauteur h au-dessous du niveau libre pour lequel on a la pression atmosphérique p_0; ϖ désigne en outre le poids de l'unité de volume du liquide. On pourra donc, connaissant ϖ et observant h sur le mano-

mètre, en déduire la pression p. Il faudra encore pour cela déterminer avec le baromètre la pression atmosphérique p_0. Mais le plus souvent on la suppose constante et représentée par $0^m,76$ de mercure, ce qui équivaut à 10328 kilogrammes par mètre carré. Souvent aussi on n'a besoin de connaître que la pression effective ou la différence de l'intérieur à l'extérieur

$$p - p_0 = \varpi h.$$

Si la pression intérieure devient moindre que celle de l'atmosphère, h est négatif et le liquide s'abaisse dans la branche extérieure au-dessous de son niveau dans la branche intérieure.

324. *Manomètre à air libre.* — Il se compose d'un tube recourbé renfermant un liquide qui est ordinairement le mercure, et parfois, pour de moindres pressions, l'eau ou l'acide sulfurique.

Manomètre Richard. — Pour les grandes pressions, la colonne de mercure devrait atteindre une hauteur considérable. On préfère alors fractionner l'action en imaginant une série de tubes recourbés qui forment une ligne sinueuse, et qui renferment des matelas d'eau pour transmettre la pression de l'un à l'autre des niveaux de mercure. En négligeant l'influence très-faible de ces colonnes d'eau, la hauteur du manomètre simple équivalent est la somme des dénivellations partielles dans les branches contiguës. Si l'on s'arrange pour que le mercure soit de niveau dans toutes les branches à la fois, la dénivellation totale devient le produit d'une hauteur par le nombre de branches, produit qui peut être effectué d'avance dans la graduation.

Manomètre Galy-Cazalat. — On réduit la hauteur de la colonne mercurielle en la faisant agir sur la grande base et recevant la pression inconnue sur la petite base d'un

piston différentiel. On désigne sous ce nom le système d'un gros et d'un petit piston qui jouent dans des cylindres de même axe et sont réunis par une tige solide. Les hauteurs représentatives sont alors réduites dans le rapport inverse des sections, ou des carrés des rayons (1).

325. — MANOMÈTRES A CONTRE-POIDS. — Le principe consiste à équilibrer la pression par un contre-poids dont la variation indique celle de la pression elle-même. Ces appareils, ainsi que ceux du troisième genre, se graduent ordinairement par comparaison avec un manomètre hydrostatique, sans qu'il y ait besoin pour cela de recourir à une théorie qu'il serait du reste bien facile de formuler.

Manomètre Desbordes. — Dans son premier modèle, aujourd'hui à peu près inusité, M. Desbordes recevait la pression sur un piston dont la tige agissait par l'intermédiaire d'une fourchette sur un levier coudé muni d'un contre-poids. Celui-ci se trouvait plus ou moins écarté de la verticale du centre de rotation, de manière à compenser par la variation de son bras de levier celle de la pression. Ce système revient au fond à l'application du peson (331) à la mesure des pressions fluides.

Manomètre Rivals. — Cet appareil est fondé sur le principe d'Archimède, d'après lequel un corps éprouve, de la part du liquide dans lequel on le plonge, une poussée égale au poids du liquide déplacé et qui varie par suite avec le degré de l'immersion.

Le fluide intérieur agit par l'intermédiaire d'un piston sur un levier dont l'autre extrémité est employée à main-

(1) C'est, du reste, identiquement le principe de la *presse hydraulique*, avec cette différence que, dans cette machine, les pistons sont reliés par le fluide, au lieu de l'être par une tige rigide, et que des forces extérieures quelconques, au lieu de pressions fluides, leur sont appliquées directement.

tenir dans un bain de mercure un flotteur en fer. Il s'établit entre les deux forces un antagonisme qui règle le degré de l'immersion. Ce dernier permettra par conséquent de mesurer la pression.

Manomètre Giroud. — Le principe est encore celui d'Archimède, mais l'inventeur s'est proposé d'obtenir une grande précision en évitant les frottements et en supprimant pour cela tout point d'appui. Le flotteur est une cloche renversée sous laquelle on admet le gaz, de sorte que la variation de la pression fera sortir ou rentrer cette cloche dont la hauteur permettra de mesurer la pression.

Pour analyser cet effet, supposons pour plus de simplicité que la section de la partie pleine de la cloche soit égale à celle du vide. Une variation de pression intérieure aura un double effet. En premier lieu elle fera émerger la cloche d'une quantité telle, que le poids de ce volume d'eau soit égal à l'excédant de pression supporté par le fond de la cloche. En second lieu, elle modifiera la dénivellation du liquide, d'une hauteur qui mesure cet accroissement de pression. Le produit de cette hauteur par la section du vide intérieur ou du fond de la cloche mesure donc d'une part le volume de liquide expulsé, et d'autre part le volume qui représente l'effort additionnel supporté par le fond, c'est-à-dire, d'après ce que nous venons de voir, le volume de parois qui vient d'émerger du niveau extérieur. Ces deux espaces étant égaux, il s'ensuit que le liquide expulsé se logera exactement dans la place laissée libre par la cloche, et que le niveau extérieur restera constant.

Le même effet se produira si les sections ne sont plus égales, mais conservent un rapport constant. Le mouvement ascensionnel de la cloche sera seulement amplifié dans ce même rapport, mais le niveau extérieur restera encore invariable.

Tout se réduit donc, pour obtenir la précision des mesures, à réaliser la constance de ce niveau, si des causes quelconques viennent à l'altérer. Dans ce but, M. Giroud établit la communication du bassin principal avec un réservoir secondaire qui reçoit le gaz à sa partie supérieure, et dans lequel on introduit verticalement un certain nombre d'aiguilles, de manière à ramener le niveau principal au zéro. Dans ces conditions, M. Giroud annonce une approximation de $\frac{1}{10}$ de millimètre.

326. MANOMÈTRES ÉLASTIQUES. — Le principe de ces appareils consiste à faire subir l'impression du fluide par un corps déformable qui accusera, par l'importance de son altération, celle de la pression. Ordinairement cette déformation influence directement une tige, et un renvoi quelconque la transmet à une aiguille indicatrice.

Manomètre à air comprimé. — Le corps déformable est un matelas d'air confiné par un index de mercure et dont le volume changera avec la pression. Cette variation est à peu près celle de la loi de Mariotte, mais on n'a nul besoin de l'invoquer et on graduera l'instrument, ainsi que les suivants, par comparaison.

Manomètre Meyer. — Le corps déformable est un ressort à boudin disposé à peu près comme dans l'indicateur de Watt (320).

Manomètres Desbordes, Charton, Dedieu, Clair, Johnson, Schœferet, Pfitzenreiter. — Le corps déformable est une plaque d'acier longitudinale ou circulaire, simple ou double, qui fait flèche sous la pression.

Manomètres Bourdon, Schnitz. — Le corps déformable employé par M. Bourdon est un tube spiral dont une extrémité est fixe et sert à l'admission de la vapeur; l'autre est fermée pour retenir le fluide (*Pl. XVI, fig.* 253). Elle

est mobile et elle agit sur une aiguille indicatrice. La section du tube est une ellipse très-aplatie. La vapeur tend à occuper le plus grand espace ou à rapprocher ce profil de la forme circulaire. De là des déformations qui modifient nécessairement la courbure longitudinale et déplacent l'extrémité.

Le dispositif de M. Schnitz ne diffère du précédent qu'en ce que le tube, au lieu d'une spire, en présente un certain nombre.

Manomètre Bossuet. — Le corps déformable est un ressort d'acier, en forme de V, qui sert de carcasse à une sorte de soufflet dont la membrane est en cuivre. La vapeur le gonfle et fait varier l'ouverture du ressort.

§ III.

BALANCES.

327. Les *balances* servent directement à la mesure des poids et indirectement à la mesure des forces quelconques lorsqu'on les ramène à s'exercer dans le sens vertical. On les applique encore à la mesure des masses d'après la formule

$$m = \frac{p}{g} = \frac{p}{9{,}8088} = 0{,}10195\ldots p.$$

On peut les répartir en deux genres, suivant qu'elles emploient la déformation d'un corps élastique, ou qu'elles procèdent par comparaison avec des corps types qu'on appelle *poids titrés*.

Premier genre. — *Dynamomètres* (de force).

Second genre. — *Balances* (proprement dites).

Je dois avertir de suite que ces dernières ont sur les appareils du premier genre un avantage assez important pour

que tous les perfectionnements les aient prises pour objet, en laissant les autres au second plan. On sait en effet que le poids des corps change aux divers lieux de la terre, le nombre g variant proportionnellement, puisque la masse reste constante. Or les dynamomètres fournissent seulement la valeur de p, de sorte qu'il faudrait connaître en chaque lieu la valeur de g, pour pouvoir appliquer la formule. Les balances, au contraire, identifient la masse proposée avec des masses connues. Leurs indications resteront donc constantes, tandis que celles des dynamomètres seraient essentiellement variables, si leur degré de précision permettait d'apprécier ces petites différences.

328. DYNAMOMÈTRES (1). — *Dynamomètre de Regnier.* — C'est un crochet en forme de V, dont les deux branches font ressort et se rapprochent sous l'action du poids que l'on suspend à la branche supérieure, en plaçant la branche inférieure horizontalement.

Dynamomètre de traction. — C'est le système qui a déjà été décrit sous le même nom (319), en supprimant l'appareil à bandes qui sert à mesurer le travail et le remplaçant par une aiguille indicatrice.

Manivelle dynamométrique. — C'est encore le système précédent (319), dans lequel on remplace l'appareil à bandes par un petit arc gradué, le long duquel se déplace l'extrémité de la flasque élastique.

Pèse-lettres à boudin. — Il se réduit à un ressort en hélice qui fléchit sous le poids de l'objet placé sur un plateau supérieur.

C'est encore le dispositif du *dynamomètre ordinaire* qui sert à éprouver la force du poing.

---

(1) Je rappellerai l'avertissement qui a été donné ci-dessus (315) au sujet du double sens du mot *dynamomètre*.

329. BALANCES. — Une balance est un appareil à liaison complète et de forme quelconque, qui présente deux plateaux pour installer le corps proposé et les poids marqués. Ces plateaux doivent d'ailleurs se mouvoir en sens inverses, l'un vers le haut, l'autre vers le bas. Il existe nécessairement pour l'appareil vide une position d'équilibre. Pour la reconnaître entre toutes, on adapte à une pièce quelconque une aiguille et on marque zéro au point d'équilibre sur un arc gradué placé en regard. Si T désigne la somme des travaux de toutes les forces qui sollicitent l'appareil dans le mouvement élémentaire qu'il peut prendre à partir de cette position, on aura pour l'équilibre

$$T = 0,$$

d'après le théorème du travail virtuel.

Cela posé, on installe le corps P dans l'un des plateaux, ce qui dérange nécessairement l'appareil, et on place dans l'autre des poids titrés P′ jusqu'à ce que l'on ait ramené l'aiguille au zéro. Si p et p' sont les vitesses virtuelles des centres de gravité de P et P′ projetées sur la verticale, la somme de tous les travaux qui sollicitent le nouveau système devra encore être nulle pour son équilibre,

$$T + Pp - P'p' = 0,$$

d'où l'on tire, en remarquant que T est le même,

$$P = P' \cdot \frac{p'}{p}.$$

P′ s'obtient par une lecture, $\frac{p'}{p}$ est un rapport géométrique que fournit l'étude cinématique de l'appareil, et la formule permet alors d'évaluer P.

Comme il est inutile, pour permettre la variation de P, de disposer à la fois des deux facteurs, on se contentera,

pour plus de simplicité, d'en faire varier un seul. De là deux genres de balances distincts.

PREMIER GENRE. — *Poids titré constant.*

SECOND GENRE. — *Rapport de vitesses constant.*

330. POIDS TITRÉ CONSTANT. — Dans ces appareils on se sert toujours du même poids de comparaison P', mais on laisse varier le rapport des vitesses $\frac{p'}{p}$.

Romaine. — Elle se réduit à un levier soutenu par un point intermédiaire et portant à son extrémité un plateau de balance ou un crochet de suspension; ce levier est gradué par expérience sur sa longue branche, le long de laquelle on fait courir le crochet qui suspend un poids titré constant.

On a proposé d'attacher le corps à une série de romaines suspendues l'une à l'autre, au nombre de deux par exemple. On obtient ainsi deux lectures dont on prend la moyenne, ce qui contribue à diminuer l'erreur de lecture en la divisant par deux. Pour simplifier l'application du procédé, on peut même employer des graduations fictives, celle de la romaine supérieure étant dégagée une fois pour toutes du poids de la romaine inférieure, et toutes les deux étant réduites à moitié, de sorte qu'il suffise de faire la somme des lectures pour avoir la moyenne.

331. *Peson.* — La forme de l'appareil est indifférente. Il suffit d'imaginer qu'il puisse tourner autour d'un axe horizontal. Le poids constant est celui du système lui-même. Il se trouve appliqué au centre de gravité, qui varie de position lorsqu'on laisse le système prendre son équilibre de lui-même, après l'introduction du corps étranger dans le plateau. On juge alors du poids de ce corps par l'écart de l'aiguille indicatrice.

332. *Dynamomètre américain.* — On appelle ainsi un appareil construit par White et qui sert à mesurer l'intensité de l'effort transmis entre deux pièces d'une machine, par exemple deux bouts d'arbre placés en prolongement. On en peut suivre l'explication sur la *fig.* 199 (*Pl. XII*), en imaginant une quatrième roue que j'appellerai C et qui complète le carré formé par les trois premières A, B, B'.

La roue A est motrice, C est la roue menée. B et B' les relient en tournant dans des sens opposés. Si donc leur arbre P n'est pas fixe, mais au contraire susceptible de tourner autour de Q, il tendra de lui-même à basculer. Pour le maintenir dans sa position il faudra exercer un certain effort, variable avec l'intensité de la transmission. On se sert pour cela d'une tige graduée située en prolongement et sur laquelle on déplace à volonté un poids constant.

On voit en résumé que ce mécanisme équivaut à une romaine qui mesure non plus le poids d'un corps suspendu à son extrémité, mais un effort dynamique qui s'y trouve appliqué.

333. Rapport de vitesses constant. — Dans ces appareils le rapport des vitesses reste le même, mais les poids tirés varient et on les compose pour chaque expérience à l'aide d'une *boîte à poids*.

Il est alors d'une nécessité absolue que les deux plateaux soient animés de mouvements de translation. Sans cela il deviendrait nécessaire de connaître le centre de gravité du corps proposé et de l'installer dans la position déterminée pour laquelle le rapport des vitesses a la valeur voulue. Au contraire, avec le mouvement de translation, tous les points prennent la même vitesse (V) et par suite aussi le centre de gravité, sans qu'il soit nécessaire de connaître sa position.

334. *Balance ordinaire.* — Elle se compose d'un fléau suspendu par son milieu et portant deux plateaux : ceux-ci,

n'étant suspendus que par un point, se disposeront parallèlement à eux-mêmes dans toutes les positions, ce qui remplit la condition de la translation.

Les bras du fléau ayant la même longueur, le rapport $\frac{p'}{p}$ est l'unité et les poids sont égaux (¹).

335. *Balance de Roberval.* — Le commerce emploie de préférence la balance à plateaux supérieurs, qui supprime les chaînes de suspension et l'embarras qu'elles occasionnent pour les pesées. On adapte pour cela deux plateaux à la partie supérieure des tiges du parallélogramme de Roberval dont nous avons déjà constaté la translation (168).

Les bras des fléaux sont ordinairement égaux. Il en est de même par conséquent des vitesses virtuelles et des poids.

336. *Balance de Quintenz.* — On l'emploie pour le pesage des objets plus considérables, sous le nom de *bascule* ou de *balance au dixième* (*Pl. XVI, fig.* 254). Elle se compose d'un fléau supérieur AB qui tourne autour d'un axe O, et d'un fléau inférieur CD monté de même sur l'axe O'. Ils sont reliés à l'aide d'une tige verticale BC et supportent le plateau au moyen de tiges parallèles DF, AE. Tout l'appareil est d'ailleurs symétrique par rapport à un plan vertical.

Il suffira dès lors, pour la translation, d'attribuer la même vitesse à deux des points de l'intersection du plateau par le plan de symétrie, par exemple E et F, ou encore A et D, qui leur sont reliés par des tiges inextensibles. Mais B et C sont de même reliés par une tige, et leurs vitesses se déduisent de celles de A et D situés sur les mêmes corps tournant en les amplifiant dans le rapport des rayons. Ce sont donc ces

(¹) Je supprime ici tous les détails relatifs aux pesées et aux balances de précision. Leur véritable place est en effet dans les Traités de Physique.

rapports de rayons qui doivent être égaux :

$$\frac{OA}{OB} = \frac{O'D}{O'C}.$$

Ainsi la condition de la translation se réduit à ce que les deux fléaux soient divisés dans un même rapport, quelconque du reste.

Pour trouver le rapport de vitesses, nous remarquerons que le centre de gravité du corps placé sur le plateau possède la même vitesse qu'un point quelconque de ce plateau, par exemple E ou A qui lui est relié. De même, les poids marqués ont la vitesse du point G. Enfin A et G se trouvent situés sur un même corps tournant, par suite le rapport de leurs vitesses sera celui de leurs rayons. Ce rapport est ordinairement le dixième.

337. *Balance de Sanctorius.* — Cet appareil a été employé pour le pesage des messageries sur les routes. La *fig.* 255 (*Pl. XVI*) représente le plan du mécanisme en supposant que le plateau a été enlevé. Celui-ci repose par quatre pieds dans des godets A qui sont portés eux-mêmes par deux fléaux en forme de V oscillant autour des charnières O. Les sommets B de ces V reposent sur une pièce transversale, et celle-ci s'appuie en C sur un fléau longitudinal qui tourne autour de la charnière O′ et s'accroche par son extrémité D à une tige verticale qui se projette entièrement sur ce point et que je désignerai par DD′. L'extrémité supérieure D′ de celle-ci est fixée à un fléau supérieur qui tourne autour de O″ et porte en E un plateau de balance pour les poids marqués.

La symétrie de l'appareil satisfait évidemment à la condition de translation.

Quant aux vitesses, elles seront p pour le plateau, ou le point A; $p\frac{OB}{OA}$ pour les points B ou C; $p\frac{OB}{OA}\cdot\frac{O'D}{O'C}$ pour D

ou D′; $p\,\frac{OB}{OA}\cdot\frac{O'D}{O'C}\cdot\frac{O''E}{O''D'}$ pour le point E ou les poids marqués. Le rapport de ces vitesses est donc

$$\frac{OB}{OA}\cdot\frac{O'D}{O'C}\cdot\frac{O''E}{O''D'}.$$

Chacun des fléaux est ordinairement divisé au dixième; les poids se trouvent par là réduits au millième.

SECONDE PARTIE.

ÉTUDE DYNAMIQUE DES MÉCANISMES.

CHAPITRE XXI.

LOIS DU FROTTEMENT.

§ I.

RÉSISTANCES PASSIVES.

338. Les machines peuvent être considérées comme des appareils destinés à modifier de toutes les manières les forces naturelles pour les appliquer à un but industriel déterminé. Il existe cependant un élément qui reste invariable dans cette transformation, si largement qu'on en puisse concevoir les conditions. Cet élément est le travail, comme nous allons le reconnaître.

Appliquons à la machine le théorème des forces vives pendant un intervalle quelconque. Nous aurons, en désignant par T le travail développé dans cet intervalle,

$$\frac{1}{2}\Sigma mv^2 - \frac{1}{2}\Sigma mv_0^2 = T.$$

Lorsque le premier membre sera nul, on aura par cela même

$$T = 0; \tag{1}$$

c'est ce qui arrivera dans trois cas importants :

En premier lieu, dans le mouvement uniforme, et pour un intervalle quelconque, car la force vive restera constante en même temps que les vitesses. Bien que ce cas soit particulier en théorie, il se rencontre fréquemment dans la pratique, car nous avons vu (4) qu'on cherche à le réaliser autant que possible.

En second lieu, dans le mouvement périodique, et pour un intervalle égal à la période, que l'on peut faire commencer du reste à un instant quelconque. C'est encore un cas particulier en théorie, mais il importe de remarquer qu'en réalité il comprend, sauf de très-rares exceptions, la totalité des machines dont le mouvement n'est pas uniforme.

Enfin, dans les conditions les plus générales, pour un intervalle égal à la marche entière depuis le départ jusqu'à l'arrêt; car les deux forces vives initiale et finale sont alors identiquement nulles.

339. Si nous désignons par M et R la valeur absolue des travaux moteurs et résistants, nous aurons

$$T = M - R,$$

et l'équation (1) deviendra

$$M = R. \tag{2}$$

D'après cela, dans les trois circonstances que nous venons d'énumérer, le travail moteur est rigoureusement égal au travail résistant.

Dans les périodes d'accélération, et notamment pendant les premiers instants qui succèdent à la mise en marche, le travail moteur est supérieur au travail résistant. En effet, la force vive allant en croissant, T doit être positif.

Dans les périodes de ralentissement, et notamment pendant les derniers instants qui précèdent l'arrêt, le travail moteur est inférieur au travail résistant, car la force vive diminue et T doit être négatif.

On peut imaginer, d'après cela, que toute machine sert à l'emmagasinement de travail sous forme de force vive. En effet, s'il y a excès de travail moteur, le travail résistant est vaincu, la différence disparaît, mais la force vive augmente d'une quantité égale. S'il y a déficit de travail moteur, le travail résistant est encore surmonté, mais au prix d'une diminution de la force vive égale à la différence. On peut supposer en quelque sorte que le premier excédant de travail s'est trouvé mis en réserve pour venir de nouveau renforcer la production continuelle du travail moteur lorsqu'elle n'est plus à la hauteur des résistances.

Mais, en définitive, après toutes ces variations dans l'aménagement du travail, le résultat est, comme nous l'avons vu, que la machine a rendu rigoureusement la totalité du travail qui lui avait été confié. De là ce principe essentiel : une machine ne crée ni ne détruit de travail; elle le transmet intégralement et ne sert qu'à modifier sa distribution (1).

340. Nous distinguerons encore dans le travail résistant la portion utilisée pour vaincre la résistance opposée par la matière élaborée, et celle qui est perdue dans le jeu même de la machine sous différentes formes que nous énumérerons tout à l'heure. Soient U le travail utile et P le travail perdu, on aura

$$R = U + P,$$

et, par suite (2),

(3) $$M = U + P.$$

(1) La nouvelle théorie de la transformation réciproque de chaleur en travail, et toutes celles analogues qui pourraient surgir, ne sauraient contredire ce théorème. Elles ne font qu'introduire un élément nouveau auquel il est nécessaire d'avoir égard, sous peine d'erreur, dans l'évaluation des travaux développés dans l'un ou l'autre sens.

On en déduit d'abord

$$M > U,$$

attendu qu'il est impossible que R puisse être annulé rigoureusement (¹). Ainsi donc une machine rend toujours sous forme de travail utile moins qu'on ne lui transmet à l'état de travail moteur.

De là l'impossibilité démontrée du *mouvement perpétuel*, c'est-à-dire d'une machine qui effectuerait continuellement du travail sans moteur permanent, ou plus généralement qui fournirait plus de travail qu'on ne lui en applique. Cette impossibilité subsiste lors même que l'on réduit la recherche à un but de pure curiosité, pour trouver un appareil qui, après avoir été lancé, continue à marcher seul sans recevoir de travail comme sans en développer. Alors, à la vérité, U est nul, mais M ne pouvant pas s'abaisser jusqu'à lui conserve une valeur que l'on ne peut qu'atténuer en soignant les dispositifs, sans jamais l'annuler.

On appelle *rendement* d'une machine le rapport de la portion utilisée à la totalité du travail moteur,

$$\rho = \frac{U}{M}.$$

Le rendement est donc toujours inférieur à l'unité. Il sert de mesure à la qualité et à l'efficacité des machines.

341. On voit par ce qui précède que c'est la quantité P ou le travail perdu dans le jeu des appareils qui forme

---

(¹) Si l'on veut, pour pouvoir l'opposer aux recherches de mouvement perpétuel, une démonstration d'une vérité aussi évidente, on remarquera que toute machine sera nécessairement pesante, par suite qu'il faudra la supporter sur des points fixes. Dès lors il y aura au moins dans cet endroit un mouvement relatif de parties en contact, qui est toujours accompagné de résistances passives, comme nous le verrons plus loin (343).

l'obstacle capital de la Mécanique appliquée, impossible à supprimer et que tous les efforts doivent tendre à diminuer. Trois causes distinctes concourent à former P.

En premier lieu, les vibrations des machines. Les pièces sont en effet des corps appelés solides, mais en réalité plus ou moins élastiques. Ils prennent donc, outre le mouvement général que nous étudions dans la théorie des transmissions, de petits mouvements d'oscillation dans les environs de leur forme normale. La force vive totale se compose alors de deux parties, à savoir : la force vive apparente et celle qui est relative à ces petits mouvements. Cette dernière ne constitue pas par elle-même du travail perdu, c'est seulement du travail emmagasiné sous cette forme un peu différente de la première et que l'on retrouverait intégralement en laissant arrêter l'appareil s'il était isolé dans l'espace. Mais, dans l'application, ces petits mouvements se transmettent aux supports, de là aux objets environnants, dans le sol et dans l'atmosphère où il devient impossible de les suivre (1). La force vive, ainsi déplacée, exécute certainement des travaux, mais sur des objets étrangers à la machine, d'où résulte une perte nette pour l'objet industriel que l'on se propose. Le seul moyen que l'on puisse employer pour la diminuer est d'amortir les fondations par l'emploi de matériaux peu élastiques, et aussi de rompre les séries régulières au lieu de les favoriser dans l'établissement du mécanisme ; car ces mouvements éminemment périodiques sont favorisés par toutes les combinaisons qui facilitent le retour d'un même état de choses.

342. En second lieu, les chocs et généralement tous les

(1) On peut citer comme preuve à l'appui la trépidation très-sensible du sol et des constructions près d'une machine puissante, ainsi que le son intense que développe le mouvement des volants.

changements brusques de vitesse. Ces phénomènes sont en effet toujours accompagnés d'une perte de force vive, c'est-à-dire d'une diminution qui, bien entendu, a été convertie en travail, mais en travail perdu dans des déformations moléculaires. Et non-seulement ce travail est perdu quant à sa valeur industrielle, mais de plus il est en général employé à détériorer les appareils en déformant les profils et relâchant les assemblages. Pour ces raisons les chocs ne doivent être employés dans les machines qu'à la dernière extrémité, et lorsque des raisons toutes spéciales motivent leur intervention (251).

343. Enfin les résistances passives. On appelle ainsi les forces qui se développent au contact des organes en mouvement relatif et dont le travail est toujours résistant. Elles jouent, dans la question qui nous occupe, le rôle principal, et vont être de notre part l'objet d'une étude spéciale. J'en donnerai tout d'abord la nomenclature.

Comme les matériaux qui figurent dans les machines sont de trois sortes, il y a lieu de distinguer les résistances des solides, des cordes et des fluides. Elles sont au nombre de deux pour chaque cas.

Le mouvement relatif de deux solides en contact peut être en effet de glissement ou de roulement (XXII). De là deux résistances régies par des lois distinctes et qu'on appelle *frottement* et *résistance au roulement*.

Le mouvement relatif des cordes sur les jantes peut être également de glissement ou d'enroulement (195). De là deux résistances que l'on appelle *frottement des cordes* et *roideur*.

Le mouvement relatif des fluides, par rapport aux corps immergés, présente lui-même deux variétés : le glissement tangentiel et la pénétration normale. De là deux résistances qu'on appelle *frottement des fluides* et *résistance des milieux*.

§ II.

LOIS DU FROTTEMENT.

344. Les premières recherches relatives au frottement remontent au XVIIe siècle. Parmi les physiciens qui s'en sont occupés, on peut citer Amontons (1699), Lahire, Parent, Camus, Desaguliers, Euler, l'abbé Nollet (1754), Muschenbroek (1762), Ximénès (1782), Vince (1785), Coulomb (1791), Rennie (1828), M. le général Morin (1831-1834), et dans ces dernières années, MM. Poirée et Bochet (1858), M. Hirn, MM. Sella et Montefiore (1862).

Je n'entrerai pas ici dans le détail des expériences qui ont permis de formuler les lois du frottement. Je m'engagerai encore moins dans le champ des hypothèses pour en expliquer les phénomènes. Je me contenterai d'exposer avec détail les résultats obtenus jusqu'ici et que l'on peut considérer comme constituant l'état actuel de la science sur ce sujet.

345. FAIT PRINCIPAL. — Le fait même du frottement consiste en ce que l'action mutuelle de deux solides en contact est généralement oblique à leur plan tangent commun. A peine est-il besoin d'en indiquer des exemples, j'en citerai cependant deux décisifs.

Le premier est relatif à l'état statique. Un corps pesant placé sur un plan trop peu incliné ne descend pas et reste en repos. L'équilibre existe donc entre son poids et la réaction du plan, et comme ces forces sont au nombre de deux seulement, elles doivent être égales et opposées. Le poids étant vertical, il en est de même de la réaction, et comme le plan est incliné, on voit qu'elle est oblique au plan.

Le second est relatif à l'état dynamique. Un corps pesant lancé en glissant sur un plan horizontal s'arrête bientôt.

Sa force vive ainsi perdue nécessite un travail égal. Mais la pesanteur est verticale, la trajectoire horizontale; par suite le travail du poids est nul. C'est donc la réaction du plan qui développe un travail, ce qui prouve qu'elle n'est pas normale au plan.

La réaction oblique peut toujours être décomposée en deux autres, normale et tangentielle. La première est celle que l'on étudie dans la Mécanique rationnelle pure, lorsque l'on envisage les liaisons théoriques. Nous n'avons rien à ajouter ici à ces considérations. La seconde, au contraire, est ordinairement négligée dans cet ordre de considérations. On l'appelle *frottement*, et c'est elle qui doit être l'objet de notre étude.

346. Lois du frottement. — Les lois du frottement, pour en donner d'abord un énoncé absolu, sauf à le compléter par quelques éclaircissements ultérieurs, sont comprises dans les cinq propositions suivantes :

I. Le frottement ne dépend que du mouvement relatif; il est directement opposé au glissement relatif.

II. Il est proportionnel à la pression normale.

III. Il est indépendant de l'étendue des surfaces en contact.

IV. Il est indépendant de la vitesse relative.

V. Il est doublement spécifique.

Développons ces propositions.

347. I. Le frottement ne dépend que du mouvement relatif; il est directement opposé au glissement relatif.

C'est un fait généralement admis et pour ainsi dire évident. On doit citer cependant deux expériences qui ont paru à M. le général Morin indiquer une influence appréciable de l'état de repos ou de mouvement de l'un ou l'autre corps. Ces

expériences sont relatives aux deux cas (orme, chêne) et (fer, bronze) qui se trouvent à peu près aux deux extrémités de l'échelle du frottement à sec.

348. II. Le frottement est proportionnel à la pression normale.

Cette loi est admise sans contestation; mais il est nécessaire de bien fixer ce qu'on doit entendre par pression normale. Diverses causes peuvent la faire différer de la composante indiquée par le calcul de la transmission des forces.

On doit citer d'abord la pression atmosphérique. Elle aura pour effet d'augmenter l'effort normal de toute la pression correspondante à la surface de contact, si l'air a été entièremeut expulsé en raison de l'extrême poli des surfaces. Le même effet peut aussi se produire partiellement. Les enduits liquides y remédient assez bien en transmettant la pression dans toutes les régions qu'ils peuvent atteindre.

On a indiqué aussi une force répulsive due à la chaleur. Powels et Fusinieri ont reconnu, par exemple, qu'un verre de montre placé sur un plan incliné, également de verre, descend de lui-même pour des inclinaisons moindres, si le verre est chauffé que lorsqu'il est froid. En poussant à l'extrême la différence de température, on obtient les phénomènes de l'*état sphéroïdal*.

Probablement, quoique l'attention n'y ait pas encore été portée, l'électricité exerce une semblable influence.

Ces causes sont importantes à noter, car le frottement tend par lui-même à les développer. On sait, en effet, qu'il est une source énergique de chaleur et d'électricité.

349. III. Le frottement est indépendant des surfaces en contact.

Ce fait, qui peut surprendre au premier abord, se conçoit cependant assez bien en ce que, si la surface augmente, et avec elle toutes les causes d'enchevêtrement moléculaire

qui produisent le frottement, la pression par unité de surface diminue par cela même, et avec elle l'intensité des enchevêtrements. Quoi qu'il en soit, le fait est établi par l'expérience.

Coulomb a cependant pensé qu'outre le terme proportionnel à la pression, il convient d'en introduire un avec un faible coefficient, en raison de la surface. Il se fondait pour cela sur ce que la pression normale doit augmenter par les attractions moléculaires des parties en contact. On a cru reconnaître l'influence de ce terme dans des mécanismes très-légers, tels que ceux des montres. Mais M. Morin a montré qu'elle disparaît complétement dans les machines où les forces appliquées sont tant soit peu notables.

Il est toutefois nécessaire de réserver le cas où la surface de contact serait assez faible, et par suite la pression par unité de surface assez forte, pour provoquer l'altération et l'écrasement des surfaces ou seulement l'expulsion des enduits. Cependant une simple usure, inévitable dans la pratique, ne modifie pas sensiblement la loi.

La forme de la surface dans les environs du contact n'est pas absolument dénuée d'influence. Les tourillons trop minces facilitent l'expulsion des enduits. La limite de cet effet serait le raclage par une arête vive.

350. IV. Le frottement est indépendant de la vitesse relative.

Lorsque la vitesse est nulle, le frottement existe encore, mais sa valeur n'est pas déterminée par un coefficient fixe. Il peut prendre toutes les valeurs depuis zéro, si la pression mutuelle est directement normale, jusqu'à une limite pour laquelle s'opère le départ lorsque la première s'incline par trop. C'est un des points qu'il est le plus essentiel de bien remarquer, que le frottement, déterminé dans le mouvement, ne l'est pas dans le repos (370).

Lorsque le départ a eu lieu, il s'opère immédiatement une réduction dans le frottement. On distingue donc du frottement régulier le frottement au départ, développé par les corps qu'il s'agit de démarrer.

Cette différence dépend de la durée du contact, qui augmente, suivant toute probabilité, l'enchevêtrement moléculaire. Le maximum s'obtient presque instantanément pour les métaux et en quelques minutes pour les bois. Il faut parfois plusieurs jours dans le contact des métaux et du bois. Les nombres suivants, qui expriment le rapport du frottement à la pression normale, peuvent donner une idée de l'importance de cet effet :

	Repos.	Mouvement.
Chêne, chêne; fibres parallèles, sans enduit.	0,62	0,48
Fer, chêne; fibres parallèles, mouillées d'eau.	0,65	0,26
Fer, fonte; sans enduit.....	0,19	0,18

351. Les expériences de M. Morin, dont le résultat a été d'écarter toute influence de la vitesse, ont été faites dans les limites ordinaires de rapidité des machines. Elles n'autorisent donc pas absolument à étendre la même conclusion aux grandes vitesses. On conçoit même que, sous un certain rapport, le frottement doit alors augmenter, car on facilite ainsi la perte de force vive sous forme de mouvements moléculaires. On en a, par exemple, une preuve dans le son qui se produit lorsque les surfaces métalliques *ripent* ou *broutent*. En revanche, les grandes vitesses doivent à un autre point de vue diminuer le frottement, car elles tendent à transformer le glissement continu en une série de petits ricochets tangentiels qui suppriment pendant une partie du temps l'adhérence et par suite le frottement. Cette influence est bien constatée pour les machines, et même pour les constructions fixes qui sont soumises à des mouvements de trépidation.

Cette partie de la question a été soumise à l'expérience,

en ce qui concerne les chemins de fer, par MM. Poirée et Bochet. Le frottement paraît alors en définitive diminuer suivant la formule

$$f = \frac{f_0}{1 + 0{,}03.v}.$$

La constante varie d'ailleurs suivant l'état des rails.

Rails très-secs.....	$f_0 = 0{,}31$
Rails secs.....	0,22
Rails mouillés.....	0,14

Pour les faibles vitesses, MM. Sella et Montefiore sont arrivés à un résultat inverse et ont annoncé qu'au dessous de $0^m,50$ par seconde, le frottement croît avec la vitesse.

352. V. Le frottement dépend de la nature des deux substances en contact.

Dans cet énoncé, la substance doit être entendue dans son acception la plus générale, en ayant égard à toutes les circonstances qui la spécifient.

En premier lieu, l'état des surfaces, rugueuses, polies, ou usées à la longue par un contact incessamment renouvelé, comme dans le cas des tourillons. A cet égard, les vieilles machines sont préférables aux neuves.

Si le corps est fibreux, le sens des fibres a encore une influence marquée, comme l'indique l'exemple suivant (chêne, chêne; sans enduit) :

Fibres parallèles.....	0,48
Fibres perpendiculaires.....	0,34

Si le corps est cristallisé, les expériences de M. Sella ont également mis en évidence l'influence de la direction. Dans le quartz, par exemple, le frottement parallèle à l'axe de symétrie est notablement supérieur à celui qui s'exerce dans un sens perpendiculaire.

353. Le graissage substitue jusqu'à un certain point un corps à un autre. Il a pour effet d'atténuer notablement le frottement, comme le montre le tableau suivant, qui donne des valeurs moyennes relatives aux conditions des tourillons :

	A sec.	Enduit gras.
Métaux, métaux.....	0,19	0,08
Métaux, cuirs.....	0,30	0,20
Métaux, bois.....	0,42	0,08
Bois, bois.....	0,36	0,07

Le graissage permanent apporte encore une diminution plus notable, comme le montre l'exemple suivant, relatif au frottement de tourillons sur coussinets métalliques :

A sec.....	0,190
Enduit gras.....	0,080
Graissage permanent.....	0,054

Le graissage donne lieu à ce que M. Hirn appelle le frottement médiat, par opposition au frottement immédiat qui se développe entre les deux substances mêmes. Suivant cet expérimentateur, l'influence d'un enduit ne se réduirait pas à diminuer le coefficient de frottement, elle atteindrait les lois mêmes de ce frottement. Les principes de Coulomb régiraient le frottement immédiat; mais dans l'autre cas le frottement deviendrait une fonction compliquée de la pression, de l'étendue des surfaces et de la vitesse (1).

354. Lorsque l'on a égard à toutes les circonstances propres à spécifier la double nature des deux substances en contact, le coefficient du frottement prend une valeur bien

(1) On doit laisser jusqu'à un nouveau contrôle la responsabilité de ces assertions à leur auteur, bien connu, du reste, pour ses belles recherches sur l'équivalent mécanique de la chaleur.

déterminée qu'il est par suite fort important de connaître. On possède, à cet égard, une longue liste de renseignements qui ont peut être, à la vérité, le défaut de n'être pas exactement comparables. Je me bornerai à emprunter à M. le général Morin une liste déjà très-complète, et qui échappe à l'objection précédente comme étant due à un seul expérimentateur :

Substances.	Graissage.	Fibres.	Coefficient.
Chêne, orme, fonte, fer, acier, bronze; l'un sur l'autre ou sur eux-mêmes.	Graissage ordinaire, suif, huile, saindoux.		0,07 à 0,08
Id.	Légèrement onctueux		0,15
Chêne, chêne.	Savon sec,	Parallèles.	0,16
Fer, fonte.	Un peu onctueux		0,18
Fonte, chêne.	Savon sec.....		0,19
Fer, chêne.	Savon sec.....		0,21
Chêne, chêne.	Sans enduit.	Perpendiculaires.	0,34
Chêne, chêne.	Sans enduit.	Parallèles.	0,48
Fonte, chêne.	Sans enduit.....		0,49
Fer, chêne.	Sans enduit.	Parallèles.	0,62
Calcaire tendre, sur lui-même.	Sans enduit.....		0,64
Granit, granit.	Sans enduit.....		0,66
Bronze, bronze..	Sans enduit..... ..		0,80

§ III.

FORMULES DU FROTTEMENT.

355. Les lois précédentes se résument, pour un cas déterminé, en ce que le frottement est proportionnel à la pression normale.

On peut donner à cet énoncé une forme plus saisissante.

Il est évident que le triangle formé par le frottement, la pression normale et la réaction totale qui est leur résultante reste semblable à lui-même; car il a, d'après la loi fondamentale, un angle droit compris entre côtés proportionnels. Tous ses angles sont donc invariables, et on peut dire que la réaction totale fait avec la normale un angle constant qu'on appelle *angle de frottement* et que nous désignerons par φ.

Comme, du reste, le rapport des côtés d'un triangle rectangle est la tangente de l'angle aigu, on aura entre les deux constantes du frottement la relation

$$f = \operatorname{tang} \varphi.$$

Si donc nous désignons par R la réaction totale, N la pression normale et F le frottement, on aura pour les relier deux à deux ces trois formules

$$F = N \operatorname{tang} \varphi = fN,$$

$$F = R \sin \varphi = \frac{f}{\sqrt{1+f^2}} R,$$

$$N = R \cos \varphi = \frac{R}{\sqrt{1+f^2}}.$$

356. Le frottement se développant toujours entre deux corps, la question qui se présentera ordinairement sera l'évaluation de la somme des travaux de chacune des deux forces tangentielles appliquées à ces deux corps. Or, si on les comprend par la pensée dans un même système matériel, les deux frottements deviennent des forces intérieures, et on sait d'une manière générale que le travail des forces intérieures ne dépend que des mouvements relatifs des parties. De là une grande simplification dans la recherche du travail total des frottements, car il suffit de réduire par la pression l'une des pièces au repos en laissant à l'autre son mouvement relatif (XXI).

Le travail élémentaire est en général le produit de la force, du chemin parcouru et du cosinus de leur angle. Or, le frottement est toujours directement opposé au déplacement; ce cosinus est donc égal à — 1, et, par conséquent, comme il est entendu une fois pour toutes que le travail en question est résistant, c'est-à-dire négatif, on pourra se borner à multiplier le frottement par le glissement élémentaire. Je rappellerai, à ce propos (XXII), que ce dernier est la distance finale des points qui se trouvaient en contact à l'instant initial.

Très-souvent la pression normale et par suite le frottement restent constants. Le travail total sera alors le produit du frottement par le glissement total.

357. On peut trouver une fois pour toutes, pour une machine quelconque, l'influence du frottement sur le rendement. Je suppose seulement que l'on ait obtenu pour cet appareil le rapport de la puissance P à la résistance Q par les théories de l'équilibre.

Ce rapport se présentera sous la forme

$$\frac{P}{Q} = F(f),$$

car il dépend, bien entendu, du coefficient du frottement. La valeur du rendement est, en désignant par p et q les vitesses des points d'application estimées suivant les forces,

$$\frac{\text{Trav. Q}}{\text{Trav. P}} = \frac{Qq}{Pp} = \frac{1}{F(f)}\frac{q}{p}.$$

Or le rapport $\frac{q}{p}$ est purement géométrique et ne dépend nullement de la nature des matériaux employés, c'est-à-dire de f. Il sera donc le même pour toutes les valeurs de ce coefficient, et en particulier pour la limite $f = 0$.

Mais alors on rentre dans le cas des liaisons théoriques, et l'on peut invoquer l'équation des vitesses virtuelles

$$P_0 p - Q_0 q = 0,$$
$$\frac{q}{p} = \frac{P_0}{Q_0} = F(0).$$

Le rendement devient par là

$$\frac{F(0)}{F(f)}$$

et se déduit, comme on le voit, d'une manière très-simple du rapport de la puissance à la résistance.

Lorsque ce rapport, au lieu d'être constant, est variable, on n'obtient par là que ce qu'on peut appeler le rendement instantané. Il reste ensuite, pour trouver le rendement véritable, à appliquer à l'expression obtenue les méthodes que fournit le calcul intégral pour la recherche de la valeur moyenne des fonctions, pour un intervalle que l'on se fixera arbitrairement et qui sera ordinairement d'une période.

CHAPITRE XXII.

DU FROTTEMENT DANS LES MACHINES.

§ I.

GLISSIÈRES CYLINDRIQUES.

358. Il est nécessaire d'apprécier par un certain nombre d'exemples convenablement choisis le rôle du frottement dans les machines.

Nous avons distingué les organes exposés au glissement, suivant que celui-ci est simple ou mixte (XXV). Le premier mode nous a fourni les glissières, qui se rapportent à trois types différents, cylindrique, sphéroïdal et héliçoïdal (29). Je considérerai pour chacune de ces catégories la glissière des locomotives, le treuil et la vis à filet carré.

Dans le mouvement mixte, nous avons distingué la classe des excentriques et celle des engrenages (XXV). La première se rapporte au cas où le frottement est relativement sans importance; il serait, par conséquent, inutile de nous y appesantir ici. Je me bornerai donc à traiter comme quatrième exemple le cas des engrenages cylindriques circulaires.

359. *Glissière.* — La glissière des locomotives se présente à nous (33) comme un rectangle sur lequel s'exercent une puissance P parallèle aux longrines et représentant l'action du piston, et une résistance Q dirigée sous un angle α qui est variable avec l'inclinaison de la bielle. Ces deux forces sont appliquées sur le centre du rectangle. Quant

aux réactions des longrines, elles différeront suivant que la glissière s'appuiera contre une seule par sa face plane ou contre toutes les deux par ses arêtes opposées.

Dans le premier cas (*Pl. IV, fig.* 53), toutes les réactions élémentaires de la longrine sont parallèles d'après les lois du frottement (355); elles ont donc une résultante unique R inclinée elle-même sous l'angle φ et rencontrant, bien entendu, la longrine dans l'intérieur de la face d'appui. Cette force, devant faire équilibre aux deux premières qui sont appliquées au centre, doit passer elle-même par ce point. Dès lors on a AB > AC, c'est-à-dire

$$\frac{b}{2} > \frac{a}{2}\operatorname{tang}\varphi,$$

ou, plus simplement,

$$b > fa.$$

La condition pour que la glissière s'appuie par sa face plane est donc que sa longueur soit suffisamment grande, comparativement à sa largeur.

Pour obtenir la condition d'équilibre, projetons sur la droite xy perpendiculaire à R ; il viendra

$$P\cos\varphi = Q\cos(\alpha - \varphi),$$

d'où l'on tire

$$\frac{P}{Q} = \frac{\cos(\alpha-\varphi)}{\cos\varphi} = \cos\alpha + f\sin\alpha.$$

360. Le second cas (*Pl. IV, fig.* 54) correspond, d'après ce qui précède, aux glissières trop courtes,

$$b < fa.$$

Les réactions des longrines sont au nombre de deux, R et R', disposées sous l'angle φ par rapport à la normale des longrines. Trois équations sont alors nécessaires pour éliminer ces inconnues auxiliaires. On aura par les projections longitudinales

$$P = Q\cos\alpha + (R + R')\sin\varphi;$$

par les projections transversales,

$$Q \sin \alpha + (R - R') \cos \varphi = 0;$$

et par les moments relatifs au centre de la glissière, en évaluant les bras de levier des réactions à l'aide des côtés du rectangle,

$$R \left(\frac{b}{2} \cos \varphi + \frac{a}{2} \sin \varphi \right) + R' \left(\frac{b}{2} \cos \varphi - \frac{a}{2} \sin \varphi \right) = 0,$$

c'est-à-dire,

$$b (R + R') \cos \varphi + a (R - R') \sin \varphi = 0.$$

Or, les deux premières équations donnent

$$R + R' = \frac{P - Q \cos \alpha}{\sin \varphi},$$

$$R - R' = - \frac{Q \sin \alpha}{\cos \varphi},$$

et il vient, en substituant dans la troisième,

$$\frac{(P - Q \cos \alpha) b}{\operatorname{tang} \varphi} - Q a \operatorname{tang} \varphi \sin \alpha = 0,$$

d'où

$$\frac{P}{Q} = \cos \alpha + \frac{a f^2}{b} \sin \alpha.$$

361. On peut renfermer les deux résultats dans la formule

$$\frac{P}{Q} = \cos \alpha + \lambda \sin \alpha,$$

en donnant à λ les valeurs f et $\frac{a f^2}{b}$. Dès lors le rapport des travaux à chaque instant, évalué d'après la méthode générale (357), sera

$$\frac{\cos \alpha}{\cos \alpha + \lambda \sin \alpha} = \frac{1}{1 + \lambda \operatorname{tang} \alpha}.$$

Il est d'autant plus avantageux que λ est moindre. Or on passe du premier cas au second en multipliant la valeur de λ par le facteur $\frac{fa}{b}$ qui est alors supérieur à l'unité. Il convient donc de se placer dans les premières conditions en évitant le raclage par les arêtes vives, et pour cela de donner à la glissière une longueur suffisante.

§ II.

GLISSIÈRES DE RÉVOLUTION.

362. *Treuil.* — Quelles que soient les forces qui sollicitent le treuil, on peut les décomposer parallèlement et perpendiculairement à l'axe. Les premières composantes, étant parallèles entre elles, se réduiront à une seule que nous supposerons pour plus de simplicité dirigée suivant l'axe lui-même, condition réalisée ordinairement en raison de la symétrie. Chacune des composantes perpendiculaires pourra elle-même être dédoublée, par la règle des forces parallèles, en deux autres situées dans les plans transversaux des deux points d'appui du treuil sur ses coussinets. L'équilibre devra alors exister séparément dans chacun de ces plans; car, s'il n'en était pas ainsi, chacun des systèmes aurait une résultante unique, et ces deux forces, qui ne sauraient se rencontrer comme étant situées dans deux plans parallèles, ne pourraient se faire équilibre.

Notre recherche se divise donc en deux autres : perte de travail due au frottement d'un tourillon sur son coussinet sous l'influence d'une force perpendiculaire à l'axe, et perte de travail due au frottement du pivot contre le fond de la crapaudine, sous l'influence d'une force dirigée suivant l'axe. Tels sont les deux problèmes distincts qu'il nous faut traiter successivement.

363. Le tourillon n'étant sollicité que par une seule résultante transversale que j'appellerai P (*Pl. IV, fig.* 55), l'équilibre exigera que la réaction totale R du coussinet soit égale et opposée,

$$P = R.$$

Mais R fait l'angle φ avec la normale ou le rayon du tourillon (355); il en est donc de même de P. Ainsi le tourillon, qui, si l'on tient compte du jeu, ne s'appuie que par un point ou mieux par une arête, ne touche pas le coussinet sur celle où la direction de la force P semblerait devoir l'appuyer si on l'appliquait par le centre, mais par une génératrice qui en est distante de l'angle φ. Si, par exemple, le tourillon est une fusée prise dans son moyeu et simplement pesante, elle ne porte pas sur le point le plus bas, mais elle grimpe pendant le mouvement jusqu'à l'élément incliné sous l'angle φ, où elle se maintient en équilibre.

Quant au frottement, il nous est donné par sa valeur générale (255),

$$F = \frac{f}{\sqrt{1+f^2}} R = \frac{f}{\sqrt{1+f^2}} P.$$

Son travail pour un tour sera donc, si r désigne le rayon du tourillon,

$$F.2\pi r = \frac{2\pi f}{\sqrt{1+f^2}} . Pr.$$

364. Quant au tourillon proprement dit, la conséquence à tirer de cette formule est que le diamètre doit être réduit au strict nécessaire. Et en effet les tourillons ont toujours un diamètre beaucoup moindre que celui des arbres dont ils font partie. On a soin en revanche de les composer d'une matière plus résistante, telle que l'acier (451).

La même formule peut s'appliquer à l'articulation de bielle embrassant un bouton de manivelle (40), et encore

à l'excentrique circulaire à collier (41). Nous avons vu en effet que la somme des pertes de travail (356) ne dépend que du mouvement relatif, identique, dans le cas actuel, à celui d'un tourillon dans son coussinet; r représente alors le rayon du bouton de manivelle ou celui du noyau d'excentrique.

Au point de vue géométrique, l'organe est aussi le même (161), car l'excentrique circulaire à collier est équivalent au système d'une bielle et d'une manivelle dont le bras serait l'excentricité, moindre par conséquent que r. Pour une course de la bielle ou un bras de la manivelle donnés, r a donc pour limite zéro avec l'articulation, et le bras pour l'excentrique. On doit par suite le considérer comme petit pour l'articulation et comme excessif pour l'excentrique. Il faut donc, au moins dans ce dernier cas, que le facteur P soit faible, sans quoi l'influence du frottement deviendrait énorme.

Concluons de là qu'on doit employer l'articulation pour les transmissions énergiques et l'excentrique pour celles qui sont moins intenses. Dans les locomotives, par exemple, on peut apercevoir sur le même arbre des coudes munis d'articulations pour transmettre l'action motrice, et des excentriques pour produire le jeu des tiroirs avec une force qui est relativement insignifiante.

365. Occupons-nous maintenant du frottement d'un pivot sur le fond de sa crapaudine, ou d'une cheville ouvrière sur son siége (38).

Si Q nous désigne la force unique qui est dirigée suivant l'axe, on peut admettre que la pression se répartit uniformément sur toute la surface, car l'usure altérera davantage les points les plus pressés jusqu'à ce qu'ils se refusent à cette pression. Si S désigne la surface d'appui, $\frac{Q}{S}$ sera donc

la pression par unité de surface ; $\frac{Q}{S}\,2\pi r dr$, l'effort supporté par une couronne infinitésimale de rayon intérieur r et d'épaisseur dr; $f\frac{Q}{S}\,2\pi r dr$, le frottement correspondant, et $2\pi r.f\frac{Q}{S}\,2\pi r dr$ son travail pour un tour. Le travail total sera ainsi exprimé par l'intégrale

$$\int_{R'}^{R} 2\pi r.f\frac{Q}{S}\,2\pi r dr = \frac{4\pi^2 fQ}{S}\int_{R'}^{R} r^2 dr = \frac{4\pi^2 fQ}{S}.\frac{R^3-R'^3}{3}.$$

On aura pour le pivot

$$R'=0,\quad S=\pi R^2.$$

et l'expression deviendra

$$\frac{4\pi fQR}{3} = fQ.2\pi.\frac{2}{3}R.$$

Sous cette forme on reconnaît que la perte de travail est la même que si l'effort total était appliqué aux deux tiers du rayon d'appui. De là un grand intérêt à diminuer ce rayon et à employer la forme convexe dite *en goutte de suif* qui le réduit aux plus faibles dimensions. L'avantage qu'il y a à restreindre le contact aux parties centrales est si bien connu, que l'on est ordinairement contraint de tenir sous clef le système de suspension des plaques tournantes dans les gares de chemin de fer, pour éviter que les hommes d'équipe ne serrent les boulons du centre, de manière à diminuer le travail des frottements qu'ils ont à vaincre, au détriment de la stabilité de la plaque, lorsqu'un train la traverse en vitesse.

On aura de même, pour la cheville ouvrière ou un épaulement de tourillon,

$$S=\pi(R^2-R'^2),$$

et l'expression deviendra

$$\frac{4\pi f Q(R^3 - R'^3)}{3(R^2 - R'^2)} = \frac{4}{3}\pi f Q\left(R + R' - \frac{RR'}{R + R'}\right).$$

Si on désigne par ε l'épaisseur et ρ le rayon moyen,

$$R + R' = 2\rho, \quad R - R' = \varepsilon,$$

on peut employer la formule plus simple

$$\pi f Q\left(2\rho + \frac{\varepsilon^2}{6\rho}\right).$$

§ III.

GLISSIÈRES HÉLIÇOIDALES.

366. *Vis à filet carré.* — Les efforts qui sollicitent une vis dans les machines présentent toujours des conditions de symétrie qui permettent de les réduire à une force dirigée suivant l'axe et un couple perpendiculaire à l'axe. Nous traiterons ce dernier comme la puissance Pp, et la première comme la résistance Q que nous supposerons dirigée de bas en haut, la vis étant placée verticalement pour fixer les idées.

Si nous étudions d'abord le mouvement descendant, le point d'appui que prend la vis sur son écrou pour vaincre la résistance se trouvera au-dessus d'elle (*Pl. IV, fig.* 56), de sorte que la réaction élémentaire R de chaque point M sera dirigée de haut en bas, et fera avec la normale l'angle φ compté en arrière de la descente et dans le plan de la normale et du glissement. Ce dernier s'effectue suivant l'hélice du point M. Le plan tangent passe par la tangente à cette hélice et la génératrice horizontale. La normale de l'hélicoïde est donc la perpendiculaire élevée sur la tangente à l'hélice dans le plan tangent au cylindre qui passe par le

point M. Dès lors le bras de levier de la force R, par rapport à l'axe, sera le rayon r du point M, et son inclinaison sur l'axe $i+\varphi$, si i désigne celle de l'hélice du point M.

Nous aurons donc, en posant l'équation de projection sur l'axe,

$$Q = \Sigma R \cos(i+\varphi),$$

et celle des moments par rapport à l'axe,

$$Pp = \Sigma R \sin(i+\varphi).r.$$

Dans ces deux relations, i et r sont des quantités variables. Il est clair qu'il existe pour elles des valeurs moyennes telles, qu'en les leur attribuant d'une manière constante le résultat des intégrations reste le même. Comme dans la pratique les vis de machines ont des filets étroits, nous pouvons admettre sans erreur notable pour des évaluations numériques, et sans aucune espèce d'inconvénient pour la discussion de l'appareil, que ces valeurs sont toutes les deux celles qui correspondent à l'hélice moyenne, menée par le milieu de l'épaisseur. Dans ces conditions, les formules deviennent

$$Q = \cos(i+\varphi).\Sigma R,$$
$$Pp = r\sin(i+\varphi).\Sigma R,$$

et l'on en tire le rapport de la puissance à la résistance

$$\frac{P}{Q} = \frac{r}{p}\tan(i+\varphi).$$

Comme l'angle φ ne figure dans cette formule qu'en s'ajoutant à i, on peut résumer l'influence du frottement en disant qu'il a pour effet de rendre la vis théorique plus rapide, d'une quantité égale à l'angle de frottement.

Dans le mouvement ascendant, l'angle φ sera compté de l'autre côté de la normale, et l'inclinaison de la réaction

totale sur l'axe, au lieu d'être $i+\varphi$, sera $i-\varphi$. La formule deviendra de cette manière

$$\frac{P}{Q}=\frac{r}{p}\operatorname{tang}(i-\varphi).$$

L'influence du frottement sera dès lors de rendre la vis théorique plus lente d'une quantité égale à l'angle de frottement.

Si nous appliquons à la formule

$$\frac{P}{Q}=\frac{r}{p}\operatorname{tang}(i\pm\varphi),$$

qui comprend les deux cas, la méthode générale qui fait connaître le rendement (357), nous trouverons

$$\frac{\operatorname{tang} i}{\operatorname{tang}(i\pm\varphi)},$$

ou, en développant,

$$\frac{1\mp f\operatorname{tang} i}{1\pm f\operatorname{cot} i}.$$

§ IV.

ENGRENAGES.

367. *Engrenages cylindriques.* — Ces engrenages ne sont plus des glissières proprement dites, mais des appareils de glissement mixte. Il faudrait donc à la rigueur combiner avec les forces de frottement les résistances que subit le roulement. Mais ces dernières sont tellement faibles par rapport au frottement de glissement, qu'elles perdent toute influence dans les questions où elles s'y trouvent combinées, et qu'on est alors suffisamment autorisé à en faire abstraction.

Nous avons vu (74) que le mouvement relatif des engrenages revient au roulement simple de leurs courbes pri-

mitives, qui sont toujours des cercles dans les machines (*Pl. IV, fig.* 57). Nous pouvons supposer, pour plus de simplicité, que les forces appliquées à chaque roue soient réduites à une seule, tangente à son cercle primitif. Je rappelle encore ce principe fondamental (75), que la normale commune des dents passe incessamment par le point de contact des cercles primitifs.

Si nous écrivons pour chacune des deux roues l'équation des moments relatifs à son axe, il viendra

$$Qr - R\,[r\sin(\alpha+\varphi)+p\sin\varphi] = 0,$$
$$Q'r' - R'[r'\sin(\alpha+\varphi)-p\sin\varphi] = 0,$$

d'où

$$Q = R\left[\sin(\alpha+\varphi)+\frac{p}{r}\sin\varphi\right],$$
$$Q' = R'\left[\sin(\alpha+\varphi)-\frac{p}{r}\sin\varphi\right],$$

et en remarquant que $R = R'$ d'après l'égalité de l'action à la réaction,

$$\frac{Q}{Q'} = \frac{\sin(\alpha+\varphi)+\frac{p}{r}\sin\varphi}{\sin(\alpha+\varphi)-\frac{p}{r}\sin\varphi}.$$

Si donc on représente l'influence du frottement par une force additionnelle F appliquée, comme les premières, tangentiellement aux circonférences primitives, il viendra

$$\frac{F}{Q} = \frac{Q-Q'}{Q} = \frac{p\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right)\sin\varphi}{\sin(\alpha+\varphi)+\frac{p}{r}\sin\varphi}.$$

Telle est la formule rigoureuse en fonction des coordonnées polaires p et α du lieu du point de contact dans l'espace absolu.

Elle montre que le rayon p doit rester petit et l'azimut α

voisin d'un angle droit. La première condition exige que le pas soit faible et la seconde se trouve convenablement remplie dans les profils usités, pour lesquels le lieu du contact est un limaçon de Pascal (79), un cercle tangent aux circonférences primitives (81) ou une droite très-inclinée sur la ligne des centres (80).

368. Le rapport précédent est variable pendant toute l'étendue du passage d'une dent. Pour obtenir sa valeur moyenne, sous une forme suffisamment simple pour devenir pratique, nous opérerons par approximation.

Nous venons de reconnaître que α n'est que peu inférieur à 90 degrés. Nous pouvons donc, sauf erreur, confondre $\alpha+\varphi$ avec l'angle droit, ou $\sin(\alpha+\varphi)$ avec l'unité. D'ailleurs le pas est petit, et comme p lui reste inférieur, le terme $\frac{p}{r}\sin\varphi$ renferme deux facteurs très-petits p et φ, ce qui permet de le négliger. Au numérateur on peut encore remplacer $\sin\varphi$ par $\frac{f}{\sqrt{1+f^2}}$, ou dans les mêmes limites d'approximation par f. La formule se simplifie alors de la manière suivante :

$$F = fp\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right)Q.$$

Mais en raison des remarques précédentes, p diffère peu de l'arc primitif s, et le travail élémentaire du frottement peut s'écrire

$$F\,ds = fs\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right)Q\,ds,$$

ou le travail total,

$$f\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right)Q\int_0^{\sigma} s\,ds = \frac{f}{2}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right)Q\sigma^2,$$

en désignant le pas par σ. Or $Q\sigma$ représente le travail résistant que l'on peut ici remplacer par le travail moteur,

attendu qu'il est affecté dans cette formule du facteur f et que les termes dus au frottement qui forment la différence de ces deux travaux se trouveraient par là portés au second ordre. Si donc nous divisons par $Q\sigma$, nous aurons le rapport du travail perdu par le frottement au travail moteur, ou la perte proportionnelle que produisent les engrenages

$$\frac{f}{2}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right)\sigma.$$

Pour simplifier encore l'application de cette formule, nous introduirons les modules n et n' des deux roues :

$$n\sigma = 2\pi r, \quad n'\sigma = 2\pi r',$$
$$\frac{\sigma}{2r} = \frac{\pi}{n}, \qquad \frac{\sigma'}{2r'} = \frac{\pi}{n'},$$

et il viendra définitivement pour la perte proportionnelle

$$f\pi\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n'}\right).$$

369. Dans la réalité il y a plusieurs couples de dents simultanément en prise, mais le résultat n'en est pas modifié. Q est alors remplacé par une somme d'actions $Q_1+Q_2+Q_3+\ldots$ transmises par l'intermédiaire de chaque couple, et le facteur $(Q_1+Q_2+Q_3+\ldots)\sigma$ exprime encore le travail résistant pendant un pas, c'est-à-dire pendant l'intervalle qu'il suffit d'envisager pour avoir la perte proportionnelle, puisque le mouvement est nécessairement périodique.

Si l'engrenage est intérieur, on vérifiera facilement que le terme r' s'introduit dans les équations de moments, de la même manière que r, tandis qu'il figure pour l'engrenage extérieur avec un signe contraire. Il suffit donc de changer dans le résultat le signe de r' ou de n', ce qui donne

$$f\pi\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n'}\right).$$

La perte est par conséquent moins grande, ce qui crée une différence à l'avantage des engrenages intérieurs, à la vérité largement compensée par leurs inconvénients.

Le cas de la crémaillère s'obtiendra en faisant r' ou $n' = \infty$. Il viendra ainsi

$$\frac{f\pi}{n}$$

pour la perte proportionnelle.

On remarquera que dans toutes ces formules les modules figurent en dénominateur, ce qui met en évidence l'intérêt que l'on trouve à augmenter le module en diminuant le pas.

CHAPITRE XXIII.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DU FROTTEMENT.

§ I.

ARC-BOUTEMENT.

370. Le frottement, qui se présente à nous comme diminuant toujours le travail transmis utilement dans le mouvement des machines, peut, dans certains cas, apporter une entrave absolue à ce mouvement, de telle façon qu'en augmentant indéfiniment l'intensité des efforts, on arriverait à la rupture et à la dislocation complète de l'appareil, avant d'avoir provoqué sa mise en marche. C'est là une des propriétés les plus caractéristiques de la force de frottement qu'on appelle l'*arc-boutement*.

Le fait apparaîtra clairement dans les exemples qui vont suivre, mais on peut le faire prévoir d'une manière générale. En effet, d'après la loi fondamentale, la réaction de deux pièces en contact a une direction absolument assignée que rien ne peut faire varier (355); son sens sur cette direction est également déterminé pour chacun des deux corps, car il s'étend, bien entendu, de l'autre corps vers lui. Enfin son intensité, sans être déterminée, ne peut être nulle et à plus forte raison négative. Au contraire, toutes les forces que nous appliquons directement sont à notre disposition comme grandeur, direction et sens. On comprend donc que l'on puisse placer ces forces dans des conditions telles, que les équations de projections ou de mo-

ments dans lesquelles elles figurent avec les forces de réaction fournissent pour celles-ci des valeurs négatives. Or, nous venons de dire que ces valeurs ne peuvent recevoir aucune interprétation, puisqu'il ne doit pas être question d'opposition de sens. Il faut donc en conclure que le mouvement uniforme que représentent ces équations, et *à fortiori* le mouvement accéléré, sont impossibles, de sorte que le système ne pourra se mettre en marche.

Il faudrait bien se garder d'étendre cette impossibilité au repos, sous le prétexte qu'il est aussi représenté par les équations d'équilibre. On voit en effet qu'on serait conduit par là à une absurdité évidente, car il faut bien que le système soit en repos ou en mouvement. Mais d'ailleurs on doit se rappeler que dans le repos (350) la position de la réaction totale n'est plus déterminée *à priori* comme dans le mouvement. L'angle qu'elle fait avec la normale est alors quelconque, et l'on sait seulement qu'il reste compris entre les limites zéro et φ. On pourra donc toujours lui trouver une valeur capable de satisfaire aux équations, puisqu'en abaissant cet angle à la rigueur jusqu'à zéro, on rentrerait dans le cas des liaisons théoriques pour lesquelles on ne rencontre jamais d'entraves de cette nature.

371. Cette propriété curieuse se prête parfaitement à la construction des encliquetages, appareils destinés, comme nous l'avons vu (246), à permettre le mouvement dans un sens et à prévenir le retour en arrière. Il suffira en effet, en thèse générale, de disposer les éléments du mécanisme de manière que l'impossibilité dont il vient d'être question se manifeste pour un sens de mouvement et non pour l'autre. Et il n'y a là rien que de très-facile à concevoir, puisque toutes les forces de réaction changent à la fois de situation avec le sens du mouvement (347).

Ces encliquetages ont sur les rochets le grand avantage

d'éviter le temps perdu (246), et aussi le ferraillement (247) qui est à peu près inséparable de ces appareils.

372. *Arc-boutement direct.* — Le plus simple des cas d'arc-boutement se présente lorsqu'on appuie trop normalement sur un corps pour le faire glisser le long d'un autre.

Supposons en effet, pour fixer les idées, la tendance vers la gauche. La réaction R se trouvera à droite de la normale sous l'angle φ. Si donc la puissance P est inclinée de $\alpha > \varphi$, leur résultante F sera dirigée vers la gauche et produira le mouvement. Si $\alpha < \varphi$, elle se trouvera inclinée vers la droite, ce qui est inconciliable avec l'hypothèse du départ vers la gauche qu'elle doit déterminer. Le glissement aura donc lieu dans le premier cas, et sera impossible dans le second.

373. Ce principe explique pourquoi un corps pesant posé sur un plan trop peu incliné reste en équilibre (345) et ne commence à descendre que lorsque l'inclinaison devient égale à l'angle de frottement. Il permet par suite d'établir les plans de joints dans les massifs de construction, sans qu'il soit nécessaire de constater l'horizontalité rigoureuse de ces plans.

Ce principe permet de même d'établir les plans de joints dans les voûtes, sans la connaissance rigoureuse de la courbe des pressions à laquelle ils doivent être normaux; car il permet une latitude égale à φ de part et d'autre, sans que le voussoir se trouve contraint de ressortir en glissant sur les faces voisines.

374. *Vis à filet carré.* — Nous avons reconnu (366) que l'influence du frottement sur la vis à filet carré se réduit à la rendre plus rapide ou plus lente de l'angle de frottement, suivant que l'on envisage le mouvement descendant ou ascendant.

L'inclinaison théorique de la vis pour la descente est donc $i + \varphi$. Elle doit bien entendu rester inférieure à l'angle droit

$$i + \varphi < 90$$
$$i < 90 - \varphi.$$

Celle de la montée sera de même $i - \varphi$, et comme elle ne peut être négative,

$$i - \varphi > 0$$
$$i > \varphi.$$

D'après cela, pour qu'une vis puisse fonctionner dans les deux sens comme organe de transmission, il faut que les conditions précédentes soient remplies à la fois ou que l'on ait

$$\varphi < i < 90 - \varphi,$$

la vis n'étant ni trop lente ni trop rapide.

Si au contraire on considère les vis de pression ou d'assemblage, elles doivent fonctionner comme encliquetages en effectuant la descente, mais en s'opposant au retour en arrière que tendrait à provoquer la résistance. Il faut donc que la première condition se trouve remplie, mais non la seconde,

$$i < 90 - \varphi, \quad i < \varphi,$$

et par suite la vis doit être suffisamment lente.

Pour desserrer il suffira d'agir en sens inverse sur les bras de levier.

On remarquera comme une conséquence curieuse des lois du frottement l'inégalité

$$\varphi < 90 - \varphi,$$
$$\varphi < 45°,$$

qui doit être remplie par les vis de transmission. On voit par là combien l'appréciation des résistances passives est indispensable, puisque l'emploi de certains matériaux

pourrait rendre absolument impossible un mouvement que rien ne semble entraver à l'inspection d'une épure, et qui s'effectuerait en effet parfaitement avec d'autres matériaux.

375. *Coin.* — Lorsque le coin théorique subit des efforts perpendiculaires à ses faces, elles comprennent entre elles des angles égaux à ceux du coin. Or, lorsque trois forces sont en équilibre, chacune d'elles est proportionnelle au sinus de l'angle des deux autres, ce qui est aussi la relation des côtés d'un triangle. Donc les efforts subis par chacun des côtés du coin sont en raison de ces côtés.

Si nous avons égard au frottement, les réactions des faces latérales, au lieu d'être normales, se relèvent chacune de l'angle de frottement. Si donc nous imaginons un coin théorique qui soit plus ouvert que le proposé du double de cet angle, ses faces redeviendront perpendiculaires aux forces et les choses se passeront comme tout à l'heure. On peut donc dire que l'effet du frottement dans le coin est de l'ouvrir du double de l'angle du frottement pour le mouvement d'entrée. Et on reconnaîtrait de même qu'il revient à le fermer de la même quantité pour le mouvement de sortie.

L'angle théorique devient donc pour l'entrée $2(\alpha + \varphi)$, si 2α est celui du coin matériel. Il est clair que cet angle doit rester inférieur à 180 degrés, donc

$$2(\alpha + \varphi) < 180,$$
$$\alpha < 90 - \varphi.$$

Il sera de même pour la sortie $2(\alpha - \varphi)$; mais comme il ne peut être négatif, on doit avoir de même

$$2(\alpha - \varphi) > 0,$$
$$\alpha > \varphi.$$

Il faudra ainsi, pour que le coin fonctionne comme pièce de transmission, que l'on ait à la fois

$$\varphi < \alpha < 90 - \varphi.$$

Il ne doit donc être ni trop aigu ni trop obtus (et la condition $\varphi < 45$ degrés doit encore être remplie). Et pour qu'il fonctionne pour le serrage, comme cale ou clef à titre d'encliquetage, il faut poser au contraire

$$\alpha < 90 - \varphi, \quad \alpha < \varphi;$$

l'angle doit être alors suffisamment aigu.

Pour desserrer, il suffira de frapper le coin par-dessous en sens inverse, à moins que l'on n'ait un contre-coin (35).

376. *Valet.* — Les menuisiers emploient, pour maintenir les planches qu'ils veulent mettre en œuvre, une pièce de fer appelée *valet :* sa tige traverse l'établi dans un œillet spécial, et son bec s'appuie sur la planche contre laquelle on le serre à l'aide de quelques coups de maillet. Le desserrage spontané est alors impossible sous des conditions que nous allons déterminer (*Pl. XVI, fig.* 256).

Supposons le mouvement de sortie sur le point de prendre naissance; le valet sera soumis, outre la réaction F de la planche qu'il sert à maintenir, à celles R et R′ de l'établi. Ces dernières se rencontrent en K assez près de l'œillet, pourvu que l'angle de frottement φ ait une valeur suffisante. Or il faudrait que la force F passât en K pour tenir en équilibre la résultante de R et R′, et elle n'y passera pas si le bec est suffisamment long. Le valet se trouvera donc alors dans l'impossibilité de sortir.

Les conditions de l'arc-boutement sont par conséquent que le bec soit long par rapport à l'épaisseur de l'établi, et que le frottement soit suffisamment intense.

Pour desserrer il suffira de frapper quelques coups sur l'extrémité de la tige.

377. Le principe que nous venons d'expliquer pour le valet de menuiserie est évidemment plus général et con-

vient à toutes les *tiges pincées,* c'est-à-dire à celles qui sont d'une certaine largeur par rapport à la distance des points entre lesquels elles sont guidées ; lorsqu'en outre on les sollicite par des forces excentriques et éloignées de l'axe de figure des points fixes.

Ce fait se présente, par exemple, dans les tiroirs des meubles larges et peu profonds que l'on vient à pousser de travers.

Il arriverait encore dans les tiges des bocards que l'on soulève par un mentonnet latéral, si l'on n'avait soin de donner à ces tiges une assez grande longueur dont l'utilité ne s'aperçoit pas au premier abord, et d'employer en même temps des mentonnets très-courts.

C'est encore une raison de plus (361) pour donner à la coquille des glissières de locomotives une longueur suffisante par rapport à sa largeur.

378. *Encliquetage Saladin.* — Le même principe a été appliqué par M. Saladin à la construction d'un encliquetage (*Pl. XVI, fig.* 257).

La tige passe dans l'œil de chacune des deux barres qui portent à leur extrémité des boules pesantes. La barre inférieure se trouve suspendue par une bielle très-courte à un point fixe. La seconde l'est de la même manière à l'extrémité d'un levier de manœuvre.

Si les barres gardent l'inclinaison de la figure, elles pincent la tige et empêchent son poids et la réaction des matières mises en presse de la faire redescendre. Il n'en serait plus de même si les barres se rapprochaient de l'horizontale. Alors l'œil, qui est plus large que la tige, présenterait un jeu suffisant et le passage redeviendrait libre.

D'après cela, imaginons que l'on agisse sur la poignée du levier de haut en bas. L'extrémité tend à monter, la boule à descendre par son poids, l'inclinaison à être main-

tenue. Le jeu est donc impossible et le levier fera monter la tige. D'ailleurs, cette tendance arrive facilement à vaincre le poids de la boule inférieure et à rapprocher la barre de l'horizontale de manière à ouvrir le passage.

Si au contraire on relève la poignée du levier, on abaisse l'autre extrémité et la barre supérieure tend à se rapprocher de l'horizontale. La tige n'est plus pincée et elle tend à redescendre. Mais par cela même la seconde boule abaisse par son poids la barre inférieure qui reprend son inclinaison et pince la tige. Celle-ci ne peut donc redescendre et l'espace gagné vers le haut se trouve conservé. En même temps le levier s'abaissant, puisque son jeu est redevenu libre, la barre supérieure reprend la tige de plus bas, et tout est prêt pour une nouvelle opération.

Pour dépresser on n'aura qu'à soulever à la fois les deux boules.

379. M. Saladin a aussi disposé un encliquetage à double effet (*Pl. XVI, fig.* 258) qui fonctionne comme celui de Lagarousse (248).

La jante d'une roue est prise entre des anneaux ou portions d'anneaux qui l'entraîneront s'ils la pincent par leur obliquité, et glisseront librement en raison de leur largeur si on les maintient normalement à la circonférence.

Ils sont manœuvrés par des bras que la rotation fait mouvoir dans deux sens opposés. Il y en a dès lors toujours un pour lequel l'anneau pince la jante et l'entraîne, tandis que l'autre glisse à sa circonférence sous l'effort d'un ressort destiné à le maintenir normalement. Puis les rôles changent à l'oscillation suivante. L'anneau libre devient menant; mais comme il a changé de sens, le mouvement de la roue se continue du même côté.

Pour desserrer il suffit d'appuyer à la fois sur les deux anneaux de manière à les redresser normalement.

380. *Encliquetage Dobo.* — L'encliquetage Dobo est formé d'une couronne et d'un noyau indépendants l'un de l'autre (*Pl. XVI, fig.* 259). Sur celui-ci sont montés les axes de quatre cames pressées contre la couronne par autant de ressorts d'une faible énergie.

Supposons que l'on imprime à la couronne la rotation Ω: les choses se passeront comme le représente le croquis de la came O. L'action du ressort sera telle que F, celle de la couronne sera dirigée suivant R. En effet, le glissement relatif de la came par rapport à la couronne tend vers le haut, donc l'angle φ doit être compté vers le bas. Ces forces passent de côté et d'autre du point O et ont des moments de signes contraires. Or, la condition d'équilibre d'un corps assujetti autour d'un axe fixe est que la somme des moments soit nulle par rapport à cet axe. Cette condition est facile à remplir. Le glissement relatif peut donc avoir lieu dans ce sens, et la couronne n'entraînera pas le noyau, pour peu qu'une résistance quelconque le maintienne.

Au contraire, si on agit sur la couronne dans le sens Ω', la force du ressort étant F', la réaction totale sera R' et passera, pour peu que l'angle φ soit notable, du même côté de O' que F'. La condition des moments est dès lors impossible à remplir, et le glissement relatif ne pourra avoir lieu dans ces conditions. Aussi la couronne ne pourra tourner sans le noyau et l'entraînera malgré les résistances, pourvu que la puissance soit suffisante.

On voit par là qu'un mouvement alternatif de la couronne déterminera une marche progressive du noyau. Pour desserrer il suffira d'appuyer sur les quatre cames en sens contraire des ressorts.

381. Le même phénomène d'arc-boutement pourra se présenter dans les engrenages. Ce sont en effet, comme dans le cas actuel, deux courbes tangentes assujetties au-

tour d'axes de rotation. Nous venons de voir que l'arc-boutement se produit lorsqu'on diminue par trop l'angle sous lequel la ligne des centres est vue du point de contact. De là une nouvelle raison plus décisive encore que la première (367), pour que le contact s'éloigne peu de cette ligne, et que son lieu géométrique s'en détache aussi normalement que possible.

382. *Arcanseur-cale.* — On appelle ainsi un appareil inventé par M. Blatin pour permettre le mouvement en avant des roues de charrette, en prévenant toute rétrogradation, de manière à soulager le cheval aux montées. Il consiste en un simple crochet assemblé autour d'une charnière O au châssis de la voiture, et qu'on laisse retomber par son poids sur la jante de la roue (*Pl. XVI, fig.* 260).

Aux montées l'action R_1 se trouve au-dessus du rayon du point de contact. Les moments du poids P et de R_1 sont de sens contraire par rapport à O, le glissement est possible et le crochet n'exerce sur la jante qu'un frottement insignifiant. Si la roue tend à redescendre, la réaction se reporte en R_2, les deux moments deviennent de même sens et le glissement est impossible. La roue se trouve ainsi calée comme par l'effet d'un sabot (256).

§ II.

UTILITÉ DU FROTTEMENT.

383. Dans tout ce qui précède, nous nous sommes attachés à présenter le frottement sous son jour le plus ordinaire, c'est-à-dire comme une influence nuisible, contre laquelle le mécanicien doit lutter incessamment pour augmenter le rendement des machines. Mais pour se faire

une idée complète de cette force et de ses propriétés, il est nécessaire de placer en parallèle les effets éminemment utiles qu'on peut retirer de son intervention.

Je me contenterai de citer les phénomènes de la vie ordinaire, tels que la marche, la préhension des objets, etc., qui seraient à peu près impossibles en l'absence du frottement, comme on l'éprouve sur un sol glissant ou pour des objets huileux.

Je me bornerai encore à indiquer la nécessité presque irréalisable où l'on se trouverait, dans les arts de la construction, de disposer les matériaux par plans de joints mathématiquement horizontaux dans les massifs, ou normaux à la courbe des forces dans les voûtes, tandis que l'effet du frottement donne, comme nous l'avons reconnu (373), une certaine latitude autour de ces positions rigoureuses.

Arrivant aux machines proprement dites, je citerai : les encliquetages d'arc-boutement dont les fonctions utiles sont empruntées directement à la force du frottement; les rouleaux de friction fondés sur l'adhérence (5), le dynamomètre de Prony (321), les freins qui servent à régulariser le mouvement des machines (256) et parfois à prévenir les plus graves dangers; les machines locomotives dont le nom seul suffit à rappeler l'importance.

Je me suis étendu ailleurs sur la plupart de ces appareils; j'entrerai ici dans quelques développements sur ces deux dernières applications du frottement.

384. *Locomotive.* — La locomotive est un véhicule qui porte une machine à vapeur destinée à le faire avancer. Mais celle-ci, ne développant que des actions intérieures, serait dans l'impossibilité de déplacer son centre de gravité sans l'intervention d'une force extérieure. A cet effet, la machine à vapeur fait tourner un essieu qui porte les roues motrices, et l'adhérence de ces dernières pour les

rails détermine la marche du système. Étudions cette influence de plus près.

Lorsque la roue motrice est contrainte de tourner au contact du rail, il peut se présenter deux cas : ou il y aura glissement, et la machine patinera sur place, ou il y aura roulement, et la machine s'avancera; de sorte que si nous nous arrangeons de manière à rendre le glissement impossible, le roulement s'ensuivra nécessairement. Supposons donc le glissement, apprécions ses conséquences nécessaires et faisons en sorte que l'une d'elles ne soit pas remplie.

Le mouvement du train provoque une série de résistances (inertie, frottement dans les boîtes à graisse, résistance de l'air, résistance au roulement des roues de wagon, etc.) que l'on peut résumer par une certaine force T, directement appliquée en arrière du train. Si donc le véhicule patine, il y aura équilibre entre cette force et celle fN qui est développée par le frottement. On aura alors nécessairement

$$T = fN.$$

Il s'ensuit que si, en désignant par T_0 la capacité totale de résistance de la part du train, on a

$$T_0 < fN,$$

cet équilibre sera impossible. Si au contraire

$$T_0 > fN,$$

le glissement deviendra possible. On pourra, en effet, décomposer par la pensée T_0 en deux portions, l'une T égale à fN pour satisfaire à l'équation, et un excédant qui n'aura pas à entrer en jeu et qui sera comme la résistance indéfinie dont est capable un obstacle absolu et qu'il ne développe que dans la mesure nécessaire pour s'opposer aux forces qui viennent à lutter contre lui. Mais notre but est précisément de rendre le glissement impossible. Nous devons donc nous placer dans le premier cas, et grandir suffisamment fN.

Deux moyens se présentent pour cela : en premier lieu, augmenter f; mais par là on s'exposerait à grandir en même temps la résistance T_0, car les roues des wagons reposent sur le même rail et ressentiraient un accroissement de résistance si on rendait le rail rugueux et résistant. Si l'on pouvait, au contraire, placer les wagons sur un rail poli et la locomotive sur un rail rugueux, ou, pour pousser les choses à l'extrême, sur une crémaillère, on avancerait toujours malgré toutes les résistances, en employant assez de vapeur ; mais sur un même rail, et si le frottement f est trop faible, un plus grand développement de vapeur n'aura pas d'autre effet que de faire patiner la machine plus rapidement. Il convient cependant de dire que dans le cas exceptionnel du verglas, où f tend à s'atténuer démesurément, on lui restitue sa valeur en laissant écouler du sable fin sur les rails, par des entonnoirs placés à l'avant des roues motrices.

La vraie solution consiste donc à développer N. Or la source ordinaire de cette force N est le poids de la machine. De là cet apparent paradoxe, que le poids des machines fait leur puissance, tandis que celui des wagons crée la résistance. Il convient donc, lorsqu'une locomotive est construite et destinée à exercer de fortes tractions, d'utiliser pour cela tout son poids. De là pour les machines de marchandises l'usage des bielles d'accouplement (170), qui rendent toutes les roues de la locomotive solidaires avec celles que manœuvre directement la vapeur : principe fort simple que l'on pourrait étendre aux roues du tender et des wagons, si l'on ne créait par là dans le train une rigidité qui s'opposerait à son passage dans les courbes. On rencontre donc pour ce mode d'action une limite exprimée par fP, si P est le poids maximum qui puisse être utilisé, et qui se réduit ordinairement à celui de la locomotive.

Cependant M. le baron Ségnier a proposé un artifice qui

supprime toute limite pour l'adhérence fN que l'on veut obtenir. Dans ce système, outre les rails principaux et les roues motrices, on emploie un rail auxiliaire et deux galets horizontaux pressés contre lui latéralemeut par des renvois de levier communiquant avec l'attelage même du train. L'adhérence varie alors en raison de la tension de l'attelage, et par suite elle augmente indéfiniment avec la résistance à surmonter.

385. *Frein.* — L'utilité du frein consiste à développer rapidement une grande quantité de travail résistant capable de détruire une quantité équivalente de force vive, considérée dans un cas donné comme nuisible. Ce travail est dû à l'intervention du frottement. Nous avons distingué à cet égard deux modes différents (256), suivant que l'un des corps était au repos, ou que tous les deux sont mobiles. Mais au point de vue dynamique (347), ces deux modes sont équivalents et nous pouvons nous borner à considérer le premier.

Un premier genre constitue le frein de translation (sabot, frein Laignel) (256). Posons l'équation des forces vives depuis le commencement de l'action jusqu'à l'arrêt

$$-\frac{1}{2}\mathrm{MV}^2=-f\mathrm{P}.x,$$

d'où, en désignant par H la hauteur due à la vitesse,

$$x=\frac{1}{f}\cdot\frac{\mathrm{V}^2}{2g}=\mathrm{H}\cot\varphi.$$

Telle sera la distance parcourue sous l'action du frein. Pour avoir en outre le temps écoulé, nous poserons l'équation du mouvement rectiligne

$$\frac{dv}{dt}=-\frac{f\mathrm{P}}{\mathrm{M}}=-fg,$$

$$v=\mathrm{V}-fgt,$$

d'où, en faisant $v = 0$,

$$T = \frac{V}{fg}.$$

On remarquera la relation qui a lieu ici, comme du reste dans tout mouvement uniformément varié, entre l'espace et le temps

$$x = \frac{V}{2} T,$$

la même que si le mouvement devenait uniforme avec une vitesse moitié de la proposée.

Le second genre est le frein de rotation (frein des volants) (256). Posons encore l'équation des forces vives depuis l'instant dont la vitesse qu'il s'agit de détruire est Ω jusqu'à l'arrêt. Soit R le rayon du volant que l'on peut assimiler à son rayon de giration et V la vitesse à la circonférence, il viendra

$$-\frac{1}{2} MR^2 \Omega^2 = -fNR.\alpha,$$

$$\alpha = \frac{MR\Omega^2}{2fN}.$$

Pour avoir, en outre, le temps de l'arrêt, nous poserons l'équation de la rotation

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{fN.R}{MR^2} = -\frac{fN}{MR},$$

$$\omega = \Omega - \frac{fN}{MR} t,$$

d'où, en faisant $\omega = 0$,

$$T = \frac{MR\Omega}{fN} = \frac{V}{f} \cdot \frac{M}{N},$$

on aura encore entre ces deux éléments la relation

$$\alpha = \frac{\Omega}{2} T.$$

On remarquera l'analogie complète de ces deux séries de formules, qui montrent que le mode d'action des freins fondés sur le frottement des corps solides diffère peu au fond avec le dispositif. Il est donc inutile de traiter avec des formules qui seraient plus compliquées dans leur forme, mais nécessairement intermédiaires dans leur résultat, les appareils du troisième genre qui comprennent les freins mixtes dans lesquels les pièces sont animées de mouvements différents de translation et de rotation (manivelle des voitures, frein des wagons) (257).

§ III.

MOUVEMENT LOUVOYANT.

386. Il résulte de ce qui précède que le frottement exerce une influence tantôt utile, tantôt nuisible. Le plus ordinairement on se trouve dans ce dernier cas, et l'on a à lutter contre lui pour la production d'effets déterminés. Or, on peut, en se fondant simplement sur les lois qui le régissent, indiquer une manière de tourner la difficulté en évitant en quelque sorte de l'attaquer de front.

Nous savons que, pour une pression mutuelle donnée N, il se développe un frottement dont l'intensité fN est assignée sans que rien puisse l'influencer. Au contraire, la direction de cette force reste à notre disposition, car elle est opposée au glissement relatif, que nous restons maîtres d'effectuer dans une direction arbitraire. Si donc l'objet que l'on a en vue est de produire un mouvement relatif dans une direction déterminée A, nous l'effectuerons dans une autre B notablement inclinée sur la première. Le frottement sera placé, par cela même, suivant la direction B, et se décomposera en une force notable perpendiculaire à A et une peu considérable suivant A lui-même. La résistance

directe à la pénétration dans ce sens se trouvera par là sensiblement atténuée. A la vérité, la grandeur de cette pénétration sera diminuée dans le même rapport, mais si l'on se trouve dans un cas où l'on n'ait pas à se préoccuper de l'étendue du mouvement à produire, il ne résultera de cette manière d'opérer aucun inconvénient à mettre en parallèle avec l'avantage obtenu.

387. Quelques exemples sont nécessaires pour bien faire saisir le principe précédent. J'en donnerai d'abord de très-simples, d'autant plus propres à faciliter cette intelligence.

Une lame tranchante, telle qu'un couteau, se comporte comme un coin pour disjoindre les deux parois de la fente dans laquelle on engage son arête. L'effet utile est alors la pénétration verticale de cette lame. Cependant on se garde d'appuyer directement, et au contraire on retire instinctivement la lame à peu près horizontalement. Plus cette translation est rapide pour un faible enfoncement, plus la coupure se fait avec facilité. On peut même arriver ainsi à entailler une matière tendre avec des corps mal disposés pour un tel effet, tels que le tranchant des roseaux, des feuilles de papier, etc.

Lorsqu'on veut enfoncer un bouchon dans un goulot, ou une cheville dans un trou, ou inversement retirer un clou de son logement, l'effet utile est encore la pénétration ou la sortie directe de l'objet. Cependant on n'obtient aucun résultat en agissant suivant ce sens lui-même. Au contraire, on engage ou on dégage assez facilement l'objet en le tournant au fur et à mesure qu'on exerce la pression.

388. *Embrayage à cônes de friction.* — J'envisagerai comme dernier exemple un véritable organe de machines, l'embrayage à cônes de friction. Il se compose (233) de deux cônes, l'un plein, l'autre creux, qui s'entraînent mu-

tuellement par adhérence. On peut constater par expérience que cet embrayage, très-efficace pendant la marche, fonctionne mal pour faire partir les pièces ensemble. L'explication de ce fait va se trouver encore dans le principe précédent.

En effet, ce qui produit la conduite est l'adhérence. Elle a pour limite la force de frottement proportionnelle à la pression mutuelle. Celle-ci est due, d'autre part, à la déformation élastique et par suite à la quantité de pénétration au delà du contact géométrique. C'est donc cette pénétration qui forme l'effet utile à produire. Or, quand on embraye au repos, c'est par enfoncement direct et l'on a à lutter contre la totalité du frottement. Si on embraye, au contraire, pendant la marche, on louvoie comme nous l'avons expliqué, et l'enfoncement rencontre d'autant moins de résistance que la rotation est plus rapide.

§ IV.

GRAISSAGE.

389. Dans ce qui précède, nous avons cherché à atténuer les inconvénients du frottement, en considérant son intensité fN comme imposée par les circonstances et cherchant seulement à tourner la difficulté pour échapper à son influence. Mais ce moyen reste fort circonscrit dans ses applications, et un principe beaucoup plus pratique consiste à diminuer cette intensité pour des forces données N, en atténuant le coefficient f. Nous avons vu, en effet (353), qu'il suffisait pour cela de l'interposition d'un corps gras entre les surfaces glissantes. Il me reste à indiquer sommairement les principaux moyens auxquels on peut pour cela avoir recours.

390. On emploie l'huile d'olive pour l'horlogerie, celle de pied de bœuf pour les machines et les cuirs; les graisses solides, le saindoux, pour les roues de chemin de fer, afin d'éviter le ballottement de l'huile. Avec ces derniers, à la vérité, on ne lubrifie les surfaces que quand la température a été élevée par le frottement jusqu'à celle de la fusion de la graisse, de sorte qu'on remédie au mal au lieu de le prévenir. On emploie encore le suif pour les bois, le talc pour les cuirs secs. Il convient enfin d'ajouter à cette nomenclature l'eau et l'air comprimés, que M. Girard a proposé d'injecter entre les patins de chemin de fer et les rails pour supprimer l'adhérence du fer pour le fer (1).

Il est important de renouveler les enduits de temps en temps. Les huiles sont siccatives et tendent à s'épaissir, et la chaleur peut les charbonner. L'usure y mélange des poussières métalliques qui les transforment en une pâte noire plus nuisible qu'utile appelée *cambouis*. Le graissage permanent est encore préférable au renouvellement des enduits. En atténuant notablement (353) le frottement et prévenant l'élévation de température, il a seul rendu possibles les vitesses tout à fait exceptionnelles pour les pièces tournantes.

391. Le moyen le plus élémentaire consiste à disposer sur les pièces des trous munis d'entonnoirs dans lesquels le mécanicien verse quand il le juge à propos, et à l'aide d'une burette, de l'huile qui pénètre dans les mécanismes.

On améliore ce procédé en faisant jouer les pièces, comme dans le *stuffing-box* (34), au contact d'étoupes qui retiennent par capillarité l'huile que l'on y verse de temps en temps.

---

(1) On trouvera dans le *Dictionnaire des Arts et Manufactures*, au mot GRAISSAGE, les recettes d'un assez grand nombre de mélanges employés dans les ateliers. Ces détails nous écarteraient par trop de notre objet.

On obtient un effet plus régulier dans le *palier graisseur* (36), en disposant l'étoupe ou la filasse en forme de palmier dont la circonférence s'épanouit dans l'huile et dont la tige pénètre à un niveau inférieur au travers d'un tube d'écoulement (*Pl. XVI, fig.* 261). Celui-ci aboutit à la *patte d'araignée,* double rainure en forme d'hélice qui répartit l'huile montée par capillarité et redescendue par son poids, sur toutes les génératrices du coussinet.

Le procédé du *relèvement* consiste à disposer au-dessous de l'arbre tournant un bain d'huile qu'une cause quelconque remonte incessamment à la partie supérieure. Dans le *système Decoster*, le releveur est un disque monté sur l'arbre. Il plonge dans l'huile par sa partie inférieure, que la rotation appelle incessamment à redevenir la partie supérieure lorsqu'elle s'est imprégnée d'une couche d'huile que son poids fait couler sur l'axe.

Dans le *système Cail*, l'arbre porte simplement un léger renflement cylindrique et l'huile vient y affleurer, ce qui dispense d'un bain profond.

Dans le *système Hermann*, un bouchon de liége flotte sur l'huile et y est maintenu au-dessous de son niveau par l'arbre contre lequel il bute à sa partie supérieure. L'adhérence le fait tourner avec l'arbre qu'il imprègne constamment de l'huile dont il est baigné.

Lorsque l'appareil est caché, comme dans le marteau-pilon, on a recours à l'injection. Dans le *système Farcot*, chaque coup de piston manœuvre une petite pompe à huile qui injecte une faible quantité de liquide à l'intérieur.

Le graissage absolument permanent, qui consiste à faire jouer le mécanisme dans un milieu ambiant d'huile, est évidemment le meilleur. On le réalise dans la *tige-Gorgone* (164) en remplissant d'huile la tige creuse du piston dans laquelle joue l'articulation de la bielle.

On le rencontre encore dans les *crapaudines noyées* des turbines Girard. Elles sont installées au fond de l'eau. Une petite cloche les recouvre, et l'on y fait pénétrer l'huile de manière à chasser l'eau, à l'aide de la pression hydrostatique d'une colonne d'huile plus élevée que le bief d'immersion, pour avoir égard à la différence de densité des deux liquides.

CHAPITRE XXIV.

RÉSISTANCE AU ROULEMENT.

§ I.

LOIS DE LA RÉSISTANCE AU ROULEMENT.

392. Les lois de la résistance au roulement ont été étudiées par Coulomb, et depuis par M. Morin et M. Dupuit.

Le fait fondamental consiste en ce que la réaction subie par un corps roulant ne passe pas par le point de contact géométrique des deux surfaces (1).

L'observation décisive qui le montre est la suivante. Si un rouleau est placé en repos sur un plan horizontal (*Pl. IV, fig.* 58), et sollicité par une force horizontale et perpendiculaire à sa génératrice, il ne s'ébranlera pas si cette force n'a pas une intensité suffisante. Un pareil équilibre s'exprime par l'équation des moments relative à la génératrice de contact. Mais le poids la rencontre et n'a pas de moment; il n'en reste par suite que deux, celui de la puissance et celui de la réaction fictive qui tient lieu de toutes les forces moléculaires. Le moment, et par suite le bras de levier de cette dernière, n'est donc pas nul, de sorte

(1) Un pareil énoncé peut surprendre au premier abord, mais il ne faut pas oublier que les forces dont nous parlons dans les théories actuelles sont des résultantes hypothétiques qui n'ont pas nécessairement d'existence absolue. Dans la réalité, il n'y a pas non plus un point de contact, mais une petite zone dont toutes les parties entrent en jeu de diverses manières.

que cette force ne peut être considérée comme rencontrant la génératrice de contact. Elle passe, au contraire, à quelque distance *en avant* dans la direction du mouvement qui tend à naître, puisque son moment doit être de signe contraire à celui de la puissance qui agit dans ce sens.

Cette réaction peut être décomposée en deux, l'une tangentielle T et l'autre normale N. La première n'est pas soumise à une loi précise comme pour le glissement, elle est seulement moindre que la valeur du frottement, et dirigée *en arrière* du mouvement

$$T < fN.$$

393. La réaction normale passe à une distance *constante* Δ du point de contact géométrique, et en avant comme nous l'avons vu. C'est la loi fondamentale de la résistance au roulement sous sa forme la plus absolue. Mais cet énoncé exige encore quelques tempéraments.

Dans le repos la distance n'est pas déterminée. Elle peut prendre toutes les valeurs depuis zéro jusqu'à la limite Δ. Il est en outre probable, en l'absence de données précises, que cette distance, lorsqu'il s'agit de démarrer, est un peu supérieure à la valeur constante qu'elle conserve pendant le mouvement.

Il ne semble pas que l'influence de la forme de la surface dans le sens transversal, comme la largeur de la jante des roues, doive être absolument dénuée d'influence; cependant on n'a rien constaté de précis à cet égard.

La forme dans le sens longitudinal, par exemple la courbure du rouleau, ne paraît, d'après les expériences, exercer aucune action sur la valeur de Δ. Cependant cette conséquence, vraie pour les limites dans lesquelles ont été faites ces expériences et qui sont celles de la pratique, ne doit pas être prise dans un sens absolu. Car si l'on imaginait, pour pousser les choses à l'extrême, un rouleau tellement

mince, que son rayon fût moindre que Δ, la force cesserait de lui être appliquée.

La distance Δ est doublement spécifique. On ne doit pas oublier que ce n'est pas un nombre abstrait comme f, ou un angle comme φ, mais une longueur métrique.

On peut citer à cet égard les valeurs suivantes :

	Δ (m)
Rouleau de fonte, granit uni	0,0010
Rouleau d'orme, bois de gaïac parfaitement dressé	0,0010
Rouleau d'orme, chêne parfaitement dressé	0,0016
Rouleau d'orme, pavé uni	0,0074
Roues en fonte, fer en saillie, graissage continu	0,0010
Roues en fonte, fer en saillie, graissage ordinaire	0,0012
Roues en fonte, fer à plat	0,0035
Roues en fonte, bois en saillie	0,0023
Roues jante en fer, chêne brut	0,0102
Roues jante en fer, pavé bien entretenu, au pas.	0,0185
Roues jante en fer, pavé bien entretenu, au trot.	0,0238
Roues jante en fer, empierrement, état parfait.	0,0150
Roues jante en fer, empierrement, état ordinaire	0,0414
Roues jante en fer, sable et cailloutis nouveaux.	0,0634

§ II.

EXEMPLES.

394. *Mise en roulement ou en glissement.* — La première question à résoudre est celle-ci : un corps étant sollicité en avant (*Pl. IV, fig.* 59), se mettra-t-il à rouler ou à glisser? Chacun de ces mouvements provoque, pour prendre naissance, une résistance que nous savons déter-

miner. Si nous imaginons que la puissance croisse à partir de zéro, elle ne produira d'abord aucun mouvement; puis, dès qu'elle aura atteint la plus petite de ces résistances, elle la surmontera et le mouvement correspondant se produira. Il s'agit donc de calculer ces deux résistances et de reconnaître laquelle est la plus petite.

Si nous supposons d'abord le glissement, la réaction tangentielle sera égale à fN. En projection horizontale la réaction normale et le poids disparaîtront, et il restera, en désignant par P la puissance,

$$P = fN.$$

Si nous supposons, au contraire, le roulement, et que nous prenions les moments par rapport au point de contact, le poids et la réaction tangentielle qui passent par ce point disparaîtront et il restera

$$Pp - N\Delta = 0,$$

$$P = \frac{\Delta}{p} N.$$

On aura donc roulement ou glissement suivant que

$$f \gtrless \frac{\Delta}{p},$$

ou

$$p \gtrless \frac{\Delta}{f} \gtrless \Delta \cot \varphi,$$

c'est-à-dire suivant que la puissance se trouvera au-dessus ou au-dessous d'un certain point spécifique K. C'est celui où la verticale du point de contact géométrique est rencontrée par une droite BK qui serait menée par le point d'application effectif B, comme devrait l'être une réaction totale de glissement, c'est-à-dire sous l'angle de frottement φ.

395. *Transport sur rouleaux.* — Pour montrer l'in-

fluence de la résistance au roulement dans l'équilibre ou le mouvement uniforme des machines, nous prendrons comme exemple le transport des matériaux à l'aide de rouleaux d'interposition (6).

Si nous écrivons pour le premier rouleau (*Pl. IV, fig.* 60) l'équation de projections verticales, en faisant abstraction de son poids, qui est insignifiant vis-à-vis de celui du madrier ou de la pierre de taille que l'on transporte, il viendra

$$N = N'.$$

L'équation des moments relatifs au point A sera d'ailleurs

$$2r.T = N\Delta + N'\Delta' = N(\Delta + \Delta').$$

L'autre rouleau donnerait de même

$$2r.T_1 = N_1(\Delta + \Delta'),$$

en employant les mêmes coefficients, puisque les substances sont les mêmes. Il vient, en ajoutant membre à membre,

$$2r(T + T_1) = (N + N_1)(\Delta + \Delta').$$

D'un autre côté, si nous écrivons pour le madrier les équations de projections horizontales et verticales, comme les forces qu'il subit de la part des rouleaux sont égales et contraires à celles qu'il leur imprime, nous aurons

$$T + T_1 = P,$$
$$N + N_1 = Q;$$

de sorte que l'équation précédente devient

$$2r.P = Q(\Delta + \Delta')$$

et fournit le rapport de la puissance à la résistance,

$$\frac{P}{Q} = \frac{\Delta + \Delta'}{2r}.$$

L'avantage de ce mode de transport sur les traîneaux consiste en ce qu'on pourra facilement avoir

$$\frac{\Delta + \Delta'}{2r} < f,$$

car les coefficients Δ sont en général très-faibles, et en outre on dispose de r. On pourra donc réduire la résistance autant qu'on le voudra en employant des rouleaux d'un assez grand diamètre.

396. *Arrêt spontané du roulement.* — Pour montrer l'influence de la résistance au roulement dans le mouvement varié, nous prendrons comme exemple le ralentissement et l'arrêt d'un corps rond homogène lancé en roulant sur un plan horizontal (*Pl. IV*, *fig.* 58).

Le mouvement d'un solide peut toujours être décomposé en une translation commune au centre de gravité et une rotation sur ce centre. Ce point se meut d'ailleurs comme s'il condensait toute la masse et que toutes les forces y fussent transportées. Dans le cas actuel, son mouvement est rectiligne, et par conséquent la force centripète ou la somme des projections de toutes les forces sur la normale doit être nulle :

$$N = Mg.$$

Quant à l'équation de ce mouvement rectiligne, elle sera

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{T}{M}.$$

En second lieu, le corps tourne sur son centre de gravité comme si ce point était fixe. Nous aurons donc, par le théorème des rotations autour d'un axe fixe,

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{Tr - N\Delta}{M\rho^2},$$

si ρ désigne le rayon de giration. Enfin, comme le mouve-

ment est un roulement simple, la vitesse de glissement, c'est-à-dire celle du point de contact, doit être nulle. Mais elle se compose de la translation v en avant et de la rotation $r\omega$ en arrière; donc

$$v = r\omega,$$
$$\frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt}.$$

Si maintenant nous effectuons l'élimination, il viendra

$$\frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{\rho^2}\left(r^2\frac{T}{M} - r\Delta\frac{N}{M}\right) = -\frac{1}{\rho^2}\left(r^2\frac{dv}{dt} + r\Delta g\right),$$
$$\frac{dv}{dt} = -g\frac{r\Delta}{r^2+\rho^2},$$
$$v = v_0 - g\frac{r\Delta}{r^2+\rho^2}t.$$

Si donc θ désigne la durée totale, nous aurons, pour $v = 0$,

$$\theta = \frac{v_0}{g}\cdot\frac{r^2+\rho^2}{r\Delta}.$$

En supposant, par exemple, un rouleau : $\rho^2 = \frac{r^2}{2}$,

$$\theta = \frac{3}{2}\cdot\frac{r}{\Delta}\cdot\frac{v_0}{g};$$

on aurait de même pour une bille : $\rho^2 = \frac{2}{5}r^2$,

$$\theta = \frac{7}{5}\cdot\frac{r}{\Delta}\cdot\frac{v_0}{g};$$

et ainsi de suite.

397. *Oscillations d'un corps rond dans un angle dièdre.* — Nous étudierons encore un phénomène souvent employé pour manifester la rapidité avec laquelle la résistance au roulement éteint le mouvement. Je supposerai deux plans inclinés également, mais en sens inverse à partir d'une horizontale. Un corps rond descend dans cet angle

dièdre, remonte sur le côté opposé, redescend et exécute ainsi une série d'oscillations, à la suite desquelles on le voit rentrer dans le repos. Pour analyser ce genre de mouvement, j'écarterai l'influence du choc qui se produit au fond de l'angle, en y supposant un petit congé de raccordement d'un rayon supérieur à celui du corps rond, et dont je négligerai d'ailleurs l'influence.

Commençons par étudier les circonstances du mouvement descendant. En reprenant exactement les raisonnements du problème précédent, nous obtiendrons ces quatre équations dans lesquelles j désigne l'accélération du centre :

$$N = Mg\cos i,$$

$$j = \frac{Mg\sin i - T}{M},$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{Tr - N\Delta}{M\rho^2},$$

$$j = r\frac{d\omega}{dt}.$$

On en tire, en égalant les deux valeurs de j,

$$\frac{Tr^2 - Mgr\Delta\cos i}{M\rho^2} = g\sin i - \frac{T}{M};$$

d'où

$$T = Mg\frac{\rho^2\sin i + r\Delta\cos i}{r^2+\rho^2},$$

et par suite

$$j = g\frac{r^2}{r^2+\rho^2}\left(\sin i - \frac{\Delta}{r}\cos i\right).$$

Il faut avant tout que le mouvement puisse prendre naissance et s'effectuer par roulement simple. La première condition exige que l'inclinaison i soit supérieure à la limite i_0,

pour laquelle on aurait $j = 0$,

$$\sin i_0 - \frac{\Delta}{r}\cos i_0 = 0,$$

$$\operatorname{tang} i_0 = \frac{\Delta}{r}.$$

En second lieu, pour que le mouvement soit un roulement simple, il faut que la réaction tangentielle soit moindre que celle qui se développerait dans le glissement (392), et pour cela que l'inclinaison soit inférieure à la limite i_1, qui donnerait

$$T = fN,$$

c'est-à-dire

$$Mg\frac{\rho^2 \sin i_1 + r\Delta\cos i_1}{r^2+\rho^2} = fMg\cos i_1,$$

$$\operatorname{tang} i_1 = \frac{f(r^2+\rho^2) - r\Delta}{\rho^2},$$

ce qui exige encore que Δ soit assez faible pour ne pas rendre cette valeur négative. Supposons donc l'inclinaison comprise entre ces deux limites et poursuivons.

Pour passer de l'étude de la descente à celle du mouvement ascendant, nous remarquerons que dans le mouvement rectiligne la composante tangentielle du poids $Mg\sin i$ devient retardatrice, et figurera par suite avec un signe contraire. Quant au rôle de la composante normale $Mg\cos i$, il n'a pas varié. Il nous suffira par suite de changer le signe de i pour obtenir la formule du mouvement ascendant. Nous trouvons ainsi en valeur absolue

$$j' = g\cdot\frac{r^2}{r^2+\rho^2}\left(\sin i + \frac{\Delta}{r}\cos i\right).$$

Ainsi donc, chaque mouvement descendant sera uniformément accéléré avec l'accélération j et chaque mouvement ascendant uniformément retardé avec l'accélération j',

que nous considérerons dorénavant comme des quantités connues.

398. Envisageons de suite la $n^{ième}$ descente qui s'effectue avec l'accélération tangentielle j, et sans vitesse initiale, à partir de son point le plus haut. Si l_n désigne la longueur à parcourir et v_n la vitesse finale lorsque cette longueur est parcourue, on aura, en invoquant les formules élémentaires du mouvement uniformément varié,

$$v_n = \sqrt{2jl_n}.$$

La montée suivante s'effectue avec cette vitesse initiale et l'accélération tangentielle j'. Elle s'étendra donc jusqu'à la distance

$$l_{n+1} = \frac{v_n^2}{2j'}.$$

On tire de là

$$l_{n+1} = \frac{j}{j'} l_n.$$

Si l'on pose, pour abréger,

$$k = \frac{j}{j'} = \frac{\operatorname{tang} i - \frac{\Delta}{r}}{\operatorname{tang} i + \frac{\Delta}{r}},$$

on obtient, pour déterminer l, l'équation aux différences finies

$$l_{n+1} = kl_n;$$

d'où l'on déduit

$$l_n = k^n l.$$

En effet, cette équation, attribuant un rapport constant aux termes successifs, indique une progression géométrique, qui est d'ailleurs décroissante, puisque k est inférieur à l'unité.

Évaluons d'après cela le chemin total L. La première

longueur l est parcourue seulement de haut en bas, chacune des autres l'est dans les deux sens. On peut donc écrire

$$\begin{aligned} L + l &= 2(l + l_1 + l_2 + l_3 + \ldots) \\ &= 2l(1 + k + k^2 + k^3 + \ldots) \\ &= \frac{2l}{1-k}; \end{aligned}$$

d'où

$$L = \frac{2l}{1-k} - l = \frac{1+k}{1-k} l = \frac{rl \operatorname{tang} i}{\Delta},$$

expression fort simple qui dépend du diamètre du corps rond, mais nullement de sa constitution physique représentée par le rayon de giration ρ.

Évaluons de même la durée totale du mouvement. On a, pour la montée du $n^{ième}$ trajet,

$$l_n = \frac{1}{2} j t_n^2,$$

$$t_n = \sqrt{\frac{2l_n}{j}} = k^{\frac{n}{2}} \sqrt{\frac{2l}{j}};$$

le temps de la descente de ce trajet sera de même

$$t'_n = k^{\frac{n}{2}} \sqrt{\frac{2l}{j'}},$$

et leur somme

$$T_n = k^{\frac{n}{2}} \sqrt{2l} \left(\frac{1}{\sqrt{j}} + \frac{1}{\sqrt{j'}} \right).$$

On aura donc pour la durée totale T, en remarquant comme tout à l'heure que le premier trajet comprend seulement

une descente,

$$T + t'_0 = T_0 + T_1 + T_2 + T_3 \dots$$

$$= \sqrt{2l}\left(\frac{1}{\sqrt{j}} + \frac{1}{\sqrt{j'}}\right)\left(1 + k^{\frac{1}{2}} + k^{\frac{2}{2}} + k^{\frac{3}{2}} \dots\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2l}\left(\frac{1}{\sqrt{j}} + \frac{1}{\sqrt{j'}}\right)}{1 - \sqrt{k}} = \sqrt{2l}\,\frac{\frac{1}{\sqrt{j}} + \frac{1}{\sqrt{j'}}}{1 - \sqrt{\frac{j}{j'}}}.$$

Comme d'ailleurs

$$t'_0 = \sqrt{\frac{2l}{j'}},$$

il vient

$$T = \sqrt{2l}\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{j}} + \frac{1}{\sqrt{j'}}}{1 - \sqrt{\frac{j}{j'}}} - \frac{1}{\sqrt{j'}}\right),$$

ou, en simplifiant,

$$T = \sqrt{2l}\,\frac{\sqrt{\frac{j'}{j}} + \sqrt{\frac{j}{j'}}}{\sqrt{j'} - \sqrt{j}}.$$

399. *Pendule roulant.* — Supposons enfin un corps rond de rayon r roulant dans l'intérieur d'un cylindre de révolution horizontal de rayon R, et cherchons à déterminer la loi de ses oscillations.

La seule différence que présentera, avec le cas précédent, la mise en équation du problème consiste en ce que la force centripète n'est plus nulle, comme dans le mouvement rectiligne, mais a pour valeur

$$M\frac{v^2}{R - r},$$

ce qui donne, en désignant par i l'inclinaison variable,

$$N = Mg\cos i + M\frac{v^2}{R - r}.$$

Il s'introduit par là un terme de plus dans l'équation qui résulte de l'élimination

$$\frac{dv}{dt} = g\frac{r^2}{r^2+\rho^2}\left(\sin i - \frac{\Delta}{r}\cos i\right) - \frac{r\Delta}{(R-r)(r^2+\rho^2)}v^2.$$

Si nous faisons, pour simplifier,

$$g' = g.\frac{r\sqrt{r^2+\Delta^2}}{r^2+\rho^2},$$

$$n = \frac{r\Delta}{r^2+\rho^2},$$

$$\theta = i - \text{arc tang}\frac{\Delta}{r},$$

il viendra

$$\frac{dv}{dt} = g'\sin\theta - \frac{n}{R-r}v^2.$$

Comme on a d'ailleurs

$$v = -\frac{ds}{dt} = -\frac{(R-r)d\theta}{dt},$$

nous obtiendrons enfin l'équation différentielle

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} - n\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{g'}{R-r}\sin\theta = 0.$$

Je suivrai, pour son intégration, l'analyse employée par Poisson pour l'étude du mouvement du pendule dans l'air, en me restreignant, comme lui, au cas des petites oscillations.

L'intégrale doit exprimer l'écart θ en fonction du temps t comme variable et de l'écart initial α comme constante arbitraire. Pour les petites valeurs de α, l'expression peut être développée en série convergente suivant ses puissances successives, et nous y négligerons les termes à partir du troisième ordre. Comme, du reste, θ doit rester constamment nul si $\alpha = 0$, la série n'aura pas de terme constant,

et l'on aura simplement

$$\theta = P\alpha + Q\alpha^2, \tag{1}$$

P et Q étant des fonctions du temps qu'il s'agit de déterminer. Constatons d'abord les conditions que leur imposent les circonstances initiales. On doit avoir, pour $t = 0$,

$$\theta = \alpha,$$

et, par suite,

$$P_0 = 1, \quad Q_0 = 0.$$

Comme en outre le pendule est abandonné sans vitesse initiale, on aura pour $t = 0$

$$\frac{d\theta}{dt} = 0,$$

c'est-à-dire

$$P'_0 = 0, \quad Q'_0 = 0.$$

Reportons pour θ sa valeur dans l'équation, On aura pour cela, en restant dans le même ordre d'approximation,

$$\sin\theta = P\alpha + Q\alpha^2,$$

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = P'^2\alpha^2,$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = P''\alpha + Q''\alpha^2,$$

et en substituant,

$$\left(P'' + \frac{g'}{R-r}P\right)\alpha + \left(Q'' + \frac{g'}{R-r}Q - nP'^2\right)\alpha^2 = 0,$$

équation qui se subdivise en deux autres, puisque α doit rester arbitraire,

$$P'' + \frac{g'}{R-r}P = 0, \tag{2}$$

$$Q'' + \frac{g'}{R-r}Q = nP'^2. \tag{3}$$

La première déterminera P, et ensuite la seconde fera connaître Q.

L'équation (2) a pour intégrale générale

$$P = A \sin t \sqrt{\frac{g'}{R-r}} + B \cos t \sqrt{\frac{g'}{R-r}},$$

que les conditions initiales

$$t = 0; \quad P_0 = 1, \quad P'_0 = 0;$$

réduisent à

$$P = \cos t \sqrt{\frac{g'}{R-r}}. \tag{4}$$

On en tire d'ailleurs, pour substituer dans la seconde,

$$P'^2 = \frac{g'}{R-r} \sin^2 t \sqrt{\frac{g'}{R-r}} = \frac{g'}{2(R-r)} \left(1 - \cos 2t \sqrt{\frac{g'}{R-r}}\right).$$

L'équation (3) devient par là

$$Q'' + \frac{g'}{R-r} Q = \frac{ng'}{2(R-r)} \left(1 - \cos 2t \sqrt{\frac{g'}{R-r}}\right).$$

Elle a pour intégrale générale

$$Q = M \sin t \sqrt{\frac{g'}{R-r}} + N \cos t \sqrt{\frac{g'}{R-r}} + \frac{n}{2} \left(1 + \frac{1}{3} \cos 2t \sqrt{\frac{g'}{R-r}}\right),$$

que les conditions initiales

$$t = 0; \quad Q_0 = 0, \quad Q'_0 = 0;$$

réduisent à

$$Q = \frac{n}{6} \left(3 - 4 \cos t \sqrt{\frac{g'}{R-r}} + \cos 2t \sqrt{\frac{g'}{R-r}}\right). \tag{5}$$

En reportant maintenant les expressions (4) et (5) dans

celle (1) de θ, il vient

$$\theta = \alpha \cos t \sqrt{\frac{g'}{R-r}} + \frac{n\alpha^2}{6}\left(3 - 4\cos t\sqrt{\frac{g'}{R-r}} + \cos 2t\sqrt{\frac{g'}{R-r}}\right),$$

et en ordonnant par rapport au temps,

$$\theta = \frac{n\alpha^2}{2} + \left(\alpha - \frac{2}{3}n\alpha^2\right)\cos t\sqrt{\frac{g'}{R-r}} + \frac{n\alpha^2}{6}\cos 2t\sqrt{\frac{g'}{R-r}}.$$

Telle est l'équation du mouvement.

Pour connaître le temps de l'oscillation, c'est-à-dire l'instant de l'arrêt ou de la vitesse nulle, cherchons l'expression de la vitesse angulaire de la rotation du centre de la boule autour de celui du cylindre. Il suffira pour cela de différentier par rapport au temps :

$$\sqrt{\frac{R-r}{g'}}\,\omega = \left(\alpha - \frac{2}{3}n\alpha^2\right)\sin t\sqrt{\frac{g'}{R-r}} + \frac{1}{3}n\alpha^2\sin 2t\sqrt{\frac{g'}{R-r}}$$
$$= \alpha\sin t\sqrt{\frac{g'}{R-r}}\cdot\left(1 - \frac{2}{3}n\alpha + \frac{2}{3}n\alpha\cos t\sqrt{\frac{g'}{R-r}}\right).$$

Pour annuler ω, nous ne pouvons employer le second facteur, qui diffère peu de l'unité, puisque α peut être rendu aussi petit qu'on voudra. C'est donc le premier qu'il faut égaler à zéro, ce qui donne

$$\sin T\sqrt{\frac{g'}{R-r}} = 0, \quad T\sqrt{\frac{g'}{R-r}} = \pi, \quad T = \pi\sqrt{\frac{R-r}{g'}};$$

expression constante, identique à celle du mouvement d'un pendule simple dans le vide. L'isochronisme des petites oscillations existe donc pour les deux mouvements.

CHAPITRE XXV.

RÉSISTANCES DES CORDES.

§ I.

LOIS DU FROTTEMENT DES CORDES.

400. Les cordes peuvent passer sur leurs points d'appui de deux manières différentes, en y glissant ou en s'y enroulant. Chacun de ces deux modes développe une résistance spéciale. Celle qui s'oppose au glissement est appelée *frottement des cordes*.

Le fait fondamental est celui-ci : pour faire glisser une corde sur une jante, il faut une puissance plus grande que la résistance appliquée à l'autre extrémité. J'ajouterai que la différence augmente avec une étonnante rapidité lorsque l'on fait croître l'angle d'enroulement. J'en citerai plusieurs exemples :

Pour tirer sur un arbre qu'ils veulent abattre, les bûcherons ont soin de faire faire à la corde plusieurs tours sur le tronc d'un autre arbre. A chaque effort exercé sur la portion rectiligne qui est comprise entre les deux, la corde gagne quelque espace, qui serait immédiatement perdu en raison de l'élasticité de la tige pendant que les hommes se remettent en position, si le frottement exercé contre le deuxième tronc ne permettait à un seul ouvrier de lutter facilement contre cette réaction ; on arrive ainsi progressivement à courber l'arbre jusqu'à rupture de son pivot.

Le même procédé est employé par les tonneliers lors-

qu'ils ont à descendre un tonneau plein de liquide sur les marches d'un escalier. Ils arrivent, en enroulant leur corde sur un corps rond, à lutter facilement contre le poids moteur qui est considérable, bien que réduit par l'inclinaison du plan.

Pour arrêter les vaisseaux dans les ports, on jette du bord une corde que les hommes du quai enroulent autour d'un tambour vertical en tirant sur l'extrémité. Leur force se trouve par là transmise au navire avec une augmentation considérable, de sorte qu'en agissant sur un très-faible parcours elle développe un travail capable de détruire la force vive du navire. Et cependant celle-ci est très-notable en raison de la masse qui compense la lenteur du mouvement.

Ce moyen a enfin été employé pour retenir l'obélisque de Louqsor pendant la rotation qui avait pour effet de le coucher horizontalement afin de le transporter de son ancien emplacement jusqu'au Nil. Des cordes amarrées aux engins qui l'enveloppaient passaient sur un tambour horizontal et étaient maintenues par les hommes à l'autre extrémité. On est arrivé ainsi à lutter contre l'énorme poids du monolithe et à l'empêcher d'acquérir une vitesse qui aurait déterminé sa rupture en touchant le sol.

Si l'on veut se faire une idée plus précise de l'excessive rapidité avec laquelle s'accroît le rapport de la puissance à la résistance, je citerai les valeurs suivantes de ce rapport dans le cas du frottement d'une corde de chanvre sur une jante en bois :

Nombre de tours.	Bois poli.	Bois brut.
$\frac{1}{2}$	2,82	4,81
1	7,95	23,90
$1\frac{1}{2}$	22,42	111,31
2	63,23	535,47
$2\frac{1}{2}$	178,52	2575,80

401. On peut expliquer la rapidité de cette loi par les considérations suivantes, sur la véritable nature desquelles il importe de ne pas se méprendre. Ce ne sont pas des déductions irrécusables des théorèmes de la Mécanique générale, mais seulement des aperçus fondés sur une hypothèse fort plausible et qui peuvent permettre de prévoir la loi ou de la vérifier après coup; mais qui, comme la plupart des calculs de Physique, ne sauraient être acceptés définitivement qu'après le contrôle d'une vérification expérimentale.

Les cordes doivent participer des propriétés des solides puisqu'elles ne sont ni liquides ni gazeuses. Mais elles en diffèrent essentiellement par la flexibilité. Nous aurons égard à cette double condition en les envisageant comme une sorte de chapelet formé de corpuscules solides maintenus par des cordons parfaitement flexibles. Étudions le frottement d'un pareil système, d'après les lois trouvées pour les solides (346).

Le corps M sera sollicité par la réaction normale N et le frottement fN dirigé suivant la tangente (*Pl. III, fig.* 49); en outre, par les deux tensions des cordons adjacents, à savoir : T, dirigée en arrière, et T + dT en avant. Si nous projetons ces forces sur la tangente et sur la normale, nous obtiendrons les équations rigoureuses

$$\begin{aligned}(\mathrm{T}+d\mathrm{T})\cos d\theta' - \mathrm{T}\cos d\theta'' - f\mathrm{N} &= 0,\\ (\mathrm{T}+d\mathrm{T})\sin d\theta' + \mathrm{T}\sin d\theta'' - \mathrm{N} &= 0,\end{aligned}$$

qui se simplifient d'après la méthode infinitésimale de la manière suivante :

$$\begin{aligned}d\mathrm{T} - f\mathrm{N} &= 0,\\ \mathrm{T}\,d\theta - \mathrm{N} &= 0.\end{aligned}$$

On en tire

$$\frac{d\mathrm{T}}{\mathrm{T}} = f\,d\theta,$$

et en intégrant avec des logarithmes népériens,

$$\log T = f\theta + \text{const.}$$

Si nous commençons l'évaluation des angles de contingence au point où la corde se détache suivant la résistance Q, cette force constituant la dernière tension, l'équation précédente fournira la valeur de la constante sous la forme log Q. On aura ainsi

$$\log T = f\theta + \log Q,$$
$$T = Qe^{f\theta}.$$

Telle est la loi suivant laquelle la tension varie d'un bout à l'autre de l'arc embrassé. Si nous désignons encore par α l'angle total de contingence qui s'étend jusqu'au point où la corde se détache suivant la puissance P, on aura pour ce point

$$P = Qe^{f\alpha}.$$

Ainsi donc, quand l'angle d'enroulement varie en progression arithmétique, le rapport de la puissance à la résistance croît en progression géométrique, et l'on sait quelle est la rapidité de ce mode de variation. On remarquera, du reste, que le profil de la jante est resté complétement indéterminé.

Pour pouvoir appliquer cette formule, il faut encore connaître la valeur de f. Je citerai, à cet égard, les nombres suivants, d'après les expériences de M. Morin :

Courroies ordinaires sur fonte, à sec	$f = 0{,}28$
Courroies ordinaires sur fonte, humides.....	0,38
Courroies sur bois, ordinaires.....	0,47
Courroies sur bois, neuves.....	0,50
Cordes de chanvre, sur bois	0,50

§ II.

EXEMPLES.

402. *Frein flexible.* — Le frein flexible (256) consiste en une bande de tôle (*Pl. XIV, fig.* 227) amarrée à l'arrière de la rotation et tendue par une puissance P. Nous représenterons par Q la tension du brin fixe. Ici la corde est en repos et la jante tourne dans le sens de la flèche. Pour rentrer par la pensée dans les conditions précédentes, il nous faut réduire la jante au repos et attribuer un glissement de sens contraire à la corde. C'est alors Q qui se trouve dirigé suivant le mouvement. Son rôle et celui de P se trouvent donc intervertis, et l'on doit permuter de même les lettres dans la formule précédente

$$Q = P e^{f\alpha}.$$

Quant au treuil, c'est un solide qui tourne sous l'influence d'une infinité de forces de frottement ayant toutes le même bras de levier et équivalentes par suite à leur somme Q — P appliquée à ce même bras de levier r en arrière du mouvement. Le théorème des rotations donnera, par conséquent,

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{(Q-P)r}{\mu} = -\frac{(e^{f\alpha}-1)Pr}{\mu},$$

si μ désigne le moment d'inertie. On en tire en intégrant

$$\omega = \Omega - \frac{(e^{f\alpha}-1)Pr}{\mu}t,$$

et pour le temps θ de l'arrêt, en faisant $\omega = 0$,

$$\theta = \frac{\mu\Omega}{(e^{f\alpha}-1)Pr}.$$

403. Pour comparer la puissance de ce frein à celle du frein des volants (236), il suffit d'en rappeler la formule (385)

$$\theta' = \frac{\mu\Omega}{f\,\mathrm{P}\,r},$$

dans laquelle P désigne la puissance, qui est alors exercée normalement au lieu de l'être tangentiellement. On en tire, à égalité de coefficient de frottement,

$$\frac{\theta}{\theta'} = \frac{f}{e^{\alpha} - 1},$$

rapport aussi faible que l'on voudra, puisque l'on dispose de α. La conclusion est donc, sous ce rapport, à l'avantage du frein flexible.

Il est nécessaire cependant que l'angle d'enroulement soit notable pour que cet avantage devienne sensible. La limite sera donnée par l'équation

$$\frac{f}{e^{f\alpha_0} - 1} = 1,$$

d'où l'on tire

$$\alpha_0 = \frac{\log(1+f)}{f}.$$

On aura, par exemple, aux deux extrémités de l'échelle des coefficients de frottement (401), et ayant soin de se rappeler que le logarithme est népérien,

$$f = \frac{1}{4}, \quad \alpha_0 = 4\log\frac{5}{4} = 0{,}8925742 = 51^\circ\,8'\,26''$$

$$f = \frac{1}{2}, \quad \alpha_1 = 2\log\frac{3}{2} = 0{,}8109302 = 46^\circ\,27'\,46''.$$

404. Il n'est pas indifférent d'amarrer la bande flexible à l'arrière ou à l'avant de la rotation, en exerçant au contraire la puissance en avant ou en arrière.

Si, en effet, l'amarre est à l'avant et la puissance P en

arrière, nous transporterons encore à la corde le glissement en sens contraire de la rotation, et P se trouvera dirigé en avant, c'est-à-dire dans les conditions de la formule fondamentale (401). Nous aurons donc

$$P = Qe^{f\alpha}.$$

Le théorème des rotations donne d'ailleurs

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{(Q - P)\,r}{\mu} = \frac{\left(e^{-f\alpha} - 1\right)Pr}{\mu},$$

d'où l'on déduit comme ci-dessus

$$\theta_1 = \frac{\mu\Omega}{1 - e^{-f\alpha}},$$

Si l'on compare maintenant ces deux valeurs, il vient

$$\frac{\theta_1}{\theta} = \frac{e^{f\alpha} - 1}{1 - e^{-f\alpha}} = e^{f\alpha},$$

ce qui montre que la durée est supérieure, c'est-à-dire l'efficacité moins grande dans le second cas que dans le premier. La disproportion est de plus aussi grande qu'on le voudra puisque l'on dispose de α.

405. *Courroies sans fin.* — Nous avons dit que les courroies sans fin peuvent transmettre le mouvement pourvu que la tension soit suffisante, tandis que, si la courroie est lâche, la communication se trouve supprimée (236). Cherchons à déterminer le minimum T_0 de tension qu'il faut développer uniformément dans toute la courroie pendant le repos, pour que la conduite puisse avoir lieu au départ.

Lorsque le mouvement prendra naissance, le brin inférieur qui mène la roue à laquelle est appliquée la résistance devra posséder une tension T supérieure à celle t de l'autre brin. Leur relation pour la limite où le glissement serait

sur le point de se produire sera, d'après ce que nous avons vu (401),

$$T = t.e^{f\alpha}.$$

Cette différence de tension est produite par les variations que subissent les longueurs des deux brins en raison de l'élasticité de la courroie. Mais, comme la longueur totale est fixe, puisqu'elle est formée des tangentes communes et des arcs compris en dehors de leurs points de contact, éléments géométriques et invariables de la figure, il s'ensuit que la somme de ces variations est fixe elle-même; car la longueur totale peut être aussi considérée comme comprenant la longueur naturelle, plus la somme des variations. On peut d'ailleurs restreindre par approximation cette dernière à celle des brins rectilignes, toujours très-longs par rapport aux portions courbes.

On sait (433) que les forces élastiques sont proportionnelles aux variations de longueur, et comme telles égales au produit de ces variations par un coefficient constant. La somme de ces forces T et t restera donc fixe elle-même. Mais chacune d'elles a pour valeur T_0 avant le mouvement; on a donc

$$T + t = 2T_0.$$

Si enfin nous écrivons l'équilibre de la roue menée, sous l'influence de la force motrice $T - t$ appliquée au rayon r et de la résistance Q qui agit avec le bras de levier q, il vient

$$(T - t)\, r - Qq = 0.$$

Il reste à éliminer T et t entre ces trois équations. On aura pour cela

$$T_0 = \frac{T + t}{2} = \frac{t}{2}\left(e^{f\alpha} + 1\right).$$

D'autre part,

$$Q = \frac{r}{q}(T - t) = \frac{r}{q}\, t\left(e^{f\alpha} - 1\right),$$

et, en divisant membre à membre,

$$T_0 = Q \cdot \frac{q}{2r} \cdot \frac{e^{f\alpha} + 1}{e^{f\alpha} - 1}.$$

Comme cette fraction est supérieure à l'unité, on tendra à l'en rapprocher, c'est-à-dire à la diminuer, en faisant croître α. De là l'avantage des courroies à tangentes intérieures (214), pour lesquelles l'angle embrassé est plus grand qu'avec les courroies à tangentes extérieures. On n'a pas besoin alors de pousser aussi loin la tension moyenne, et par suite la fatigue de la courroie.

406. *Encliquetage Chameroy.* — Le frottement des cordes peut donner lieu à des phénomènes d'arc-boutement analogues à ceux que présentent les solides, et servir par suite pour la construction des encliquetages. Je citerai comme exemple celui de M. Chameroy (*Pl. XVI, fig.* 262).

Il a pour but de déterminer la rotation d'un tuyau sur lui-même, pour permettre d'assembler à vis les conduites d'eau ou de gaz dans le fond d'une tranchée où les manœuvres sont difficiles. On entoure le tuyau d'une corde attachée par ses deux bouts à un levier qu'elle serre contre ce tuyau. Lorsqu'on agit sur cette barre dans le sens de la force Q, le glissement relatif est impossible, comme nous allons le faire voir, et la rotation du levier détermine celle du tuyau. Si la force Q change de sens, le glissement relatif devient possible, et, la résistance extérieure maintenant le tuyau, le levier et la corde glissent en arrière pour recommencer une nouvelle opération. Tel est le phénomène dont il faut trouver l'explication.

Je supposerai, pour plus de simplicité, les deux cordons parallèles: il est clair qu'on trouverait un résultat analogue avec des angles peu différents, mais les calculs deviendront par là plus simples. Le glissement tendant à se produire de

manière que le brin inférieur précède le brin supérieur, on aura

$$T' = T.e^{f\pi} = kT,$$

en désignant, pour abréger, par k ce coefficient supérieur à l'unité.

Le levier est sollicité par la puissance horizontale Q, son poids vertical P, les tensions T et kT dirigées sous l'angle α par rapport à la verticale, et la réaction R du tuyau inclinée de φ sur l'horizontale. Posons l'équation des moments par rapport au centre du tuyau : il viendra

$$Qq - Pr - R r \sin\varphi - (k-1)Tr = 0.$$

Pour trouver R et T qui sont des forces inconnues, nous projetterons successivement sur les axes pp' et $\theta\theta'$ élevés perpendiculairement à chacune d'elles. Nous séparerons ainsi immédiatement les deux inconnues par cette sorte d'élimination géométrique :

$$P\cos\varphi + Q\sin\varphi = (k+1)T\cos(\alpha+\varphi),$$
$$P\sin\alpha + Q\cos\alpha = R\cos(\alpha+\varphi).$$

Il vient, en substituant,

$$\left(Q\frac{q}{r} - P\right)\cos(\alpha+\varphi)$$
$$= (P\sin\alpha + Q\cos\alpha)\sin\varphi + \frac{k-1}{k+1}(P\cos\varphi + Q\sin\varphi).$$

On en tire cette formule :

$$\frac{P}{Q} = \frac{q}{r}\frac{\cos(\alpha+\varphi)}{\left(\cos\alpha + \frac{k-1}{k+1}\right)\cos\varphi} - \operatorname{tang}\varphi.$$

Le dénominateur est essentiellement positif, car nous avons

fait remarquer que k est supérieur à l'unité. Si donc les cordes dépassent la direction R en se rapprochant de l'horizontale, c'est-à-dire si

$$\alpha + \varphi > 90^\circ,$$

le rapport devient essentiellement négatif, c'est-à-dire absurde (370). Le calcul nous indique ainsi que l'hypothèse du glissement relatif que nous lui avons soumise ne peut se soutenir.

Pour traiter de même celle du mouvement vers la droite, il suffit de modifier dans les formules les éléments suivants : d'abord le signe de Q, car lorsque cette force changera de sens il en sera de même du signe de son moment et de celui de ses projections ; en second lieu le signe de φ, car la tendance au glissement s'exerçant en sens inverse, l'angle φ doit être compté au-dessus de l'horizontale : par suite, il s'ajoute et se retranche partout où il se retranchait et s'ajoutait dans les évaluations précédentes ; enfin le signe de $k - 1$: en effet, le sens du glissement venant à changer, au lieu de $T' = kT$ nous aurons $T = kT'$. Il faut donc remplacer k par $\frac{1}{k}$, ce qui revient à changer le signe de $k - 1$. En y faisant toutes ces modifications, la formule devient

$$\frac{P}{Q} = \frac{q}{r} \frac{\cos(\alpha - \varphi)}{\left(\frac{k-1}{k+1} - \cos\alpha\right)\cos\varphi} - \operatorname{tang}\varphi.$$

On voit maintenant que, pourvu que α ait une valeur suffisante, ce qui rentre dans la condition du cas précédent, et que q soit suffisamment grand, l'expression restera certainement positive et rien ne s'opposera au glissement relatif.

§ III.

LOIS DE LA ROIDEUR DES CORDES.

407. Les lois de la roideur des cordes ont été étudiées par Coulomb.

Le fait fondamental est celui-ci : pour faire passer une corde par enroulement sur la jante d'une poulie, il faut une puissance supérieure à la résistance appliquée à l'autre extrémité. Cet excédant est dû à la nécessité d'un certain travail pour plier et adapter à la courbure de cette gorge une corde qui n'est pas douée d'une flexibilité parfaite et participe jusqu'à un certain point des propriétés des barres rigides.

L'excès de la puissance sur la résistance est appelé *roideur*. La loi de Coulomb consiste en ce que la roideur est proportionnelle à la courbure et fonction linéaire de la résistance. On peut dès lors, en désignant par r le rayon de la poulie, la formuler ainsi

$$\frac{m + nQ}{r}.$$

Le moment de la roideur par rapport à l'axe est alors

$$m + nQ.$$

408. Je citerai, d'après les expériences de Coulomb, les nombres suivants :

DIAMÈTRE DE LA CORDE.	m	n
m	kgm	m
0,01	0,0278	0,0012
0,02	0,1112	0,0048
0,03	0,2497	0,0110
0,04	0,4499	0,0195
0,05	0,6951	0,0203
0,08	1,7795	0,0779

Ces coefficients diminuent lorsque l'usure et la fatigue de la corde l'ont assouplie. Les valeurs précédentes, relatives aux cordes en bon état, deviennent pour des cordes à demi usées :

DIAMÈTRE DE LA CORDE.	m	n
m	kgm	m
0,01	0,0278	0,0012
0,02	0,0786	0,0034
0,03	0,1444	0,0063
0,04	0,2224	0,0097
0,05	0,3126	0,0141
0,08	0,6289	0,0275

Si les cordes sont mouillées ou simplement humides, comme cela arrive fréquemment dans la marine ou dans les mines, le coefficient n ne paraît pas changer, mais il n'en est pas de même de m qui augmente notablement. Les valeurs précédentes deviennent :

DIAMÈTRE DE LA CORDE.	m	
	EN BON ÉTAT.	A DEMI USÉES.
m	kgm	kgm
0,01	0,0556	0,0556
0,02	0,2224	0,1572
0,03	0,4995	0,2889
0,04	0,8898	0,4447
0,05	1,3903	0,6253
0,08	3,5543	1,2578

Si les cordes sont goudronnées, les coefficients augmentent encore par l'adjonction de cette pellicule rigide. On peut en juger par le tableau suivant :

DIAMÈTRE DE LA CORDE.	m	n
m	kgm	m
0,0167	0,0510	0,0031
0,0236	0,1785	0,0062
0,0332	0,2020	0,0126

§ IV.

EXEMPLES.

409. *Poulie.* — La poulie étant un corps solide assujetti autour d'un axe, son équilibre s'exprimera par l'équation des moments relatifs à cet axe. On devra y comprendre le moment Pr de la puissance, celui Qr de la résistance, celui $m + nQ$ de la roideur (407), enfin celui du frottement des tourillons sur leurs coussinets. Nous en avons trouvé (363) l'expression $\frac{f}{\sqrt{1+f^2}} P\rho$ lorsque ρ désigne le rayon de ces tourillons et P la résultante de toutes les forces appliquées. Si nous supposons, pour plus de simplicité, les cordons parallèles, cette résultante sera ici la somme $P + Q$ de la puissance et de la résistance, en y négligeant la roideur qui se trouverait par là portée au second ordre.

Nous obtiendrons ainsi l'équation

$$Pr - Qr - (m + nQ) - \frac{f}{\sqrt{1+f^2}}(P+Q)\rho = 0.$$

On en tire :

$$P = \frac{m}{r - \frac{f}{\sqrt{1+f^2}}\rho} + \frac{n + r + \frac{f}{\sqrt{1+f^2}}\rho}{r - \frac{f}{\sqrt{1+f^2}}\rho} Q,$$

c'est-à-dire une expression linéaire de la forme

$$P = \alpha + \beta Q,$$

dans laquelle nous pourrons considérer α et β comme des quantités connues.

Remarquons, pour plus tard, que dans le cas des poulies théoriques, où l'on a

$$m = n = f = 0,$$

les coefficients deviennent

$$\alpha = 0, \quad \beta = 1.$$

410. *Moufles.* — Nous supposerons une moufle dont toutes les poulies soient égales (202). Dès lors α et β seront les mêmes pour toutes et la relation des tensions de deux brins consécutifs pourra s'écrire

$$T_{k+1} = \alpha + \beta T_k.$$

C'est une équation aux différences finies linéaire et à coefficients constants qu'il faut intégrer.

Je poserai d'abord pour cela, en désignant par λ une constante indéterminée,

$$T_k = Z_k + \lambda.$$

Il vient en substituant

$$Z_{k+1} + \lambda = \alpha + \beta Z_k + \beta\lambda.$$

Profitons de l'indéterminée pour faire disparaître toutes

les constantes en posant

$$\lambda = \alpha + \beta\lambda,$$

$$\lambda = \frac{\alpha}{1-\beta},$$

$$T_k = Z_k + \frac{\alpha}{1-\beta}.$$

L'équation deviendra ainsi

$$Z_{k+1} = \beta Z_k.$$

C'est celle d'une progression géométrique

$$Z_k = C\beta^k,$$

d'où l'intégrale générale

$$T_k = C\beta^k + \frac{\alpha}{1-\beta}.$$

C désigne dans cette intégrale une constante arbitraire, et même une fonction périodique d'après la théorie des équations aux différences finies.

Mais dans la question actuelle C doit prendre une valeur déterminée. Pour la trouver, exprimons l'équilibre de la chape inférieure. Elle est sollicitée d'un côté par la résistance Q, et de l'autre par toutes les tensions. On a donc

$$Q = T_0 + T_1 + T_2 + \ldots + T_{n-1},$$

si n désigne le nombre des brins ou des poulies,

$$Q = \frac{n\alpha}{1-\beta} + C(1 + \beta + \beta^2 + \ldots + \beta^{n-1}),$$

$$= \frac{n\alpha}{1-\beta} + C\frac{1-\beta^n}{1-\beta}.$$

On en déduit

$$C = \frac{(1-\beta)Q - n\alpha}{1-\beta^n}$$

et

$$T_k = \frac{\alpha}{1-\beta} + \frac{(1-\beta)Q - n\alpha}{1-\beta^n}\beta^k.$$

Si nous appliquons cette formule à la dernière poulie pour laquelle la tension T_n n'est autre que la puissance P, nous aurons :

$$P = \frac{\alpha}{1-\beta} - \frac{n\alpha\beta^n}{1-\beta^n} + \frac{\beta^n(1-\beta)}{(1-\beta^n)}Q.$$

Telle est la relation de la puissance à la résistance. On remarquera qu'elle est encore de la même forme :

$$P = \alpha' + \beta' Q.$$

On peut vérifier cette formule pour le cas de l'absence des résistances passives (408). En faisant d'abord

$$\alpha = 0,$$

il reste

$$P = \frac{\beta^n(1-\beta)}{1-\beta^n}Q,$$

puis, en posant $\beta = 1$ et faisant disparaître l'indétermination,

$$\frac{P}{Q} = \left[\frac{\beta^n(1-\beta)}{1-\beta^n}\right]_1 = \frac{0}{0} = \left[\frac{n\beta^{n-1}(1-\beta)-\beta^n}{-n\beta^{n-1}}\right]_1 = \frac{1}{n},$$

ce qui est en effet la formule des moufles théoriques (201).

411. *Trains de moufles.* — Si nous supposons un train (203) composé de moufles semblables, α' et β' seront les mêmes pour toutes et la relation des tensions des deux cordes extrêmes qui sollicitent chaque moufle sera

$$T_{k+1} = \alpha' + \beta' T_k.$$

Nous en déduirons comme ci-dessus

$$T_k = C'\beta'^k + \frac{\alpha'}{1-\beta'}.$$

Pour déterminer la constante, nous remarquerons que le brin de rang zéro subit directement la résistance Q. Donc

$$Q = C' + \frac{\alpha'}{1-\beta'},$$

et par suite

$$T_k = \left(Q - \frac{\alpha'}{1-\beta'}\right)\beta'^k + \frac{\alpha'}{1-\beta'},$$

Comme du reste le dernier brin de rang m exerce directement la puissance P, on a

$$P = \left(Q - \frac{\alpha'}{1-\beta'}\right)\beta'^m + \frac{\alpha'}{1-\beta'},$$

c'est-à-dire

$$P = \frac{\alpha'(1-\beta'^m)}{1-\beta'} + \beta'^m Q,$$

expression qui est encore elle-même de la forme

$$P = \alpha'' + \beta'' Q.$$

Si, pour vérifier, nous faisons de nouveau abstraction des résistances, il nous faudra faire, d'après ce qui précède (410),

$$\alpha' = 0, \quad \beta' = \frac{1}{n};$$

il vient ainsi

$$P = \frac{Q}{n^m},$$

ce qui concorde avec le résultat que nous avons trouvé (203) pour le rapport des vitesses virtuelles.

CHAPITRE XXVI.

RÉSISTANCES DES FLUIDES.

§ I.

LOIS DU FROTTEMENT DES FLUIDES.

412. Si un élément superficiel se déplace dans un milieu fluide, son mouvement peut se décomposer en deux autres, suivant la normale et une tangente de la surface. Chacun de ces modes de mouvement comporte une résistance spéciale. Celle que développe le mouvement tangentiel s'appelle *frottement des fluides*, et celle qui s'oppose à la pénétration normale *résistance des milieux*.

Le frottement des fluides a été étudié par d'Aubuisson, Couplet, Bossut, Dubuat, Prony, Eytelwein, Darcy, et MM. de Saint-Venant, Dupuit, Tadini, Bazin (1863). Ses lois sont assez bien connues pour le cas du mouvement dans les tuyaux. Il y aurait sans doute témérité à les étendre d'une manière absolue à toute espèce de circonstances, cependant elles donnent alors au moins une idée de la manière dont les choses se passent.

413. Dans l'écoulement de l'eau au sein d'un tuyau, on ne peut admettre que la masse fluide s'avance d'un mouvement de translation. Une première pellicule liquide reste à peu près immobile au contact de la paroi, qu'elle continue en effet à mouiller lors même que le tuyau s'est entièrement vidé. Une couche concentrique frottant sur

cette pellicule, et non plus sur la surface solide elle-même, reprend plus facilement de la vitesse. Une troisième gagnera encore de l'avance sur celle-ci, et ainsi de suite jusque dans la région centrale où se trouveront les filets les plus rapides. Nous appellerons *vitesse moyenne* une vitesse telle, que si toute la masse liquide en était animée, la même quantité passerait encore dans une section quelconque du tuyau dans le même temps.

Lorsqu'au lieu d'un tuyau on considère un canal à ciel ouvert, le filet de plus grande vitesse V se trouve sur la surface et au milieu de la largeur. On peut mesurer sa rapidité au moyen d'un flotteur (1). La vitesse moyenne v s'y trouve alors reliée par une formule empirique déduite par Prony des expériences de Dubuat :

$$v = V\frac{V + 2^m,372}{V + 3^m,153};$$

son application numérique se réduit sensiblement à diminuer la vitesse maximum du cinquième de sa valeur.

M. Bazin a proposé de remplacer cette formule par une autre dans laquelle i désigne la pente par mètre courant et ρ le *rayon moyen* ou le rapport de l'aire de la section à son périmètre mouillé,

$$v = V - 14\sqrt{i\rho}.$$

414. La masse étant liquide, on ne saurait réduire à une seule force l'ensemble des actions de la paroi ; mais on peut imaginer la somme de ces actions tangentielles pour la désigner sous le nom de *frottement*. Ce sera du reste, si l'on veut, la réaction exercée par l'écoulement sur le tuyau qui

(1) Il semble cependant que les filets intérieurs possèdent une vitesse supérieure à celle de la surface. On a observé notamment que les bateaux qui ont un certain tirant d'eau descendent les rivières plus vite que des corps légers.

est un corps solide et se prête à cette réduction. Les lois qui régissent cette force sont comprises dans les trois propositions suivantes. On remarquera comme une circonstance singulière qu'elles sont sur tous les points l'inverse des lois trouvées pour les solides (346) :

Le frottement est indépendant de la pression du fluide.
Le frottement est proportionnel à la surface de contact.
Le frottement est fonction de la vitesse moyenne.

D'après cela, le frottement pourra s'exprimer de la manière suivante, en désignant par S la surface mouillée,

$$F = S.f(v).$$

Mais il reste à connaître cette fonction.

415. M. de Prony a déduit des expériences de Couplet, Bossut et Dubuat la formule

$$f(v) = \alpha v + \beta v^2,$$

avec les coefficients suivants :

Eau, tuyaux.	$\alpha = 0.0173$	$\beta = 0,348$	Prony.
	$\alpha = 0,0222$	$\beta = 0,280$	Eytelwein.
	$\alpha = 0,0188$	$\beta = 0,343$	D'Aubuisson.
Eau, canaux.	$\alpha = 0,0440$	$\beta = 0,309$	Prony.
	$\alpha = 0,0240$	$\beta = 0,366$	Eytelwein.
Air, tuyaux.	$\alpha = 0,0000$	$\beta = 0,355$	Navier.

M. de Chezy (1775) et, depuis, M. de Saint-Venant ont proposé d'autre part la formule monôme

$$f(v) = K v^m,$$

avec les valeurs suivantes :

Eau, tuyaux.	$k = 0,29557$	$m = \frac{12}{7}$	Saint-Venant.
	0,38550	2	Dupuit.
Eau, canaux.	0,40102	$\frac{21}{11}$	Saint-Venant.
	0,40000	2	Tadini.
Air, tuyaux.	0,35500	2	Navier.

416. Des expériences de Darcy ont montré que les formules précédentes présentaient une lacune importante, en ce que la forme de la paroi doit être prise en considération. Si on y introduit le rayon moyen ρ (413), les coefficients de la fonction de Prony devraient être modifiés de la manière suivante :

$$\alpha = 0,032 + \frac{0,000\,003\,76}{\rho^2},$$

$$\beta = 0,443 + \frac{0,0062}{\rho},$$

pour des tuyaux neufs, ces valeurs s'atténuant peu à peu suivant l'état des surfaces et pouvant être réduites à

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0,507 + \frac{0,00647}{\rho},$$

après quelque temps d'usage.

M. Darcy a en effet constaté que non-seulement la forme, mais encore la nature des parois, exerce une influence considérable. La fonte neuve développe un frottement une fois et demie plus grand que le bitume. Les dépôts spontanés des eaux arrivent aussi à doubler la valeur du frottement de la fonte neuve.

Les expériences de Darcy ont été reprises et continuées par M. Bazin. Cet ingénieur réduit la fonction de la vitesse à un terme proportionnel au carré, mais il introduit, d'après les vues de Darcy, un terme qui dépend du rayon moyen

$$f(\rho) = \gamma\rho^2\left(1 + \frac{\varepsilon}{\rho}\right).$$

Les valeurs de ces coefficients sont, pour les canaux à ciel ouvert et suivant le degré de rugosité des parois :

Parois très-unies (1)...	$\gamma = 0,01$	$\varepsilon = 0,03$.
Parois unies (2).....	$\gamma = 0,19$	$\varepsilon = 0,07$.
Parois peu unies (3)...	$\gamma = 0,24$	$\varepsilon = 0,25$.
Parois en terre.....	$\gamma = 0,28$	$\varepsilon = 1,25$.

§ II.

EXEMPLES.

417. *Obturateurs.* — Considérons l'écoulement permanent d'un liquide dans un tuyau cylindrique incliné. La même quantité de liquide doit passer dans toutes les sections, puisque le régime est permanent, et toutes les sections sont égales, de sorte que la vitesse est uniforme dans chaque filet. L'accroissement de la quantité de mouvement projetée sur la direction du tuyau est donc nulle pour la masse renfermée entre deux sections séparées par la distance l. Par suite, la somme des projections de toutes les forces extérieures doit être nulle pour cette même direction. Énumérons ces forces.

En premier lieu, le poids. Si A est l'aire de la section, Al est le volume et ϖAl le poids du liquide, en désignant par ϖ son poids spécifique. Pour le projeter sur l'axe du tuyau, il faut le multiplier par le cosinus de l'angle du tuyau avec la verticale. Mais le produit de l par ce cosinus sera sa projection verticale $z - z'$, si z et z' désignent les altitudes des extrémités. La projection du poids est donc $\omega A (z - z')$.

En second lieu, les pressions d'amont et d'aval PA et P′A, qui se projettent en vraie grandeur, donneront le terme $(P - P')A$.

(1) Ciment lissé, bois raboté avec soin, etc.
(2) Pierre de taille, brique, planches, ciment mélangé de sable, etc.
(3) Maçonnerie de moellon peu unie.

Quant aux pressions des parois, elles sont normales, si l'on met à part le frottement, et n'ont pas de projection.

Enfin le frottement $Sf(v)$ ou $\frac{A}{\rho} lf(v)$, puisque $\frac{A}{\rho}$ représente le périmètre de la section (413).

On aura donc l'équation

$$\varpi A(z - z') + (P - P')A - \frac{Al}{\rho} f(v) = 0,$$

qui peut s'écrire

$$\left(\frac{P'}{\varpi} + z\right) - \left(\frac{P'}{\varpi} + z'\right) = \frac{lf(v)}{\varpi\rho}.$$

Or $\frac{P}{\varpi}$ est la hauteur piézométrique de la pression d'amont; $\frac{P}{\varpi} + z$ est donc l'élévation du niveau piézométrique au-dessus du plan de comparaison. Le premier membre exprime par suite la différence de ces niveaux ou la charge. Mais toute la charge est perdue pour l'accélération, puisque le mouvement est uniforme. La perte de charge par unité de longueur s'obtiendra donc en supprimant le facteur l, ce qui donne

$$\frac{f(v)}{\varpi\rho}.$$

Si par exemple nous supposons, comme dans la lampe modérateur (259), un tuyau de rayon R et un obturateur de rayon r, on a

$$p = 2\pi(R + r), \quad A = \pi(R^2 - r^2),$$
$$\rho = \frac{R - r}{2},$$

et la perte de charge devient, en désignant par e l'épaisseur $R - r$,

$$\frac{2}{e} \frac{f(v)}{\varpi};$$

elle est donc en raison inverse de cette épaisseur. Tel est

le principe des obturateurs (258), qui consiste à forcer un liquide à se mouvoir dans un espace étroit et sur une grande longueur pour détruire du travail. Par là, en effet, la perte par mètre augmente, comme nous venons de le voir, et si on l'exerce sur une longueur notable, son effet devient d'autant plus sensible.

418. *Projectiles.* — Le mouvement des projectiles est influencé d'une manière très-notable par la présence de l'atmosphère. Pour ne parler ici que du frottement, il expose le mobile à des déviations de la direction première, comme il est facile de le comprendre.

Supposons d'abord, comme cas simple, une sphère homogène animée d'une rotation autour de la tangente sur laquelle se meut actuellement son centre. Les vitesses seront symétriquement réparties autour de cette droite. Les frottements étant fonction de la vitesse (414) se répartiront eux-mêmes d'une manière symétrique et pourront par suite être réduits à un couple dont le plan soit perpendiculaire à l'axe. Il est évident d'ailleurs qu'en raison de la symétrie du projectile la résistance à la pénétration donnera une force suivant l'axe. Enfin, d'après cette symétrie même, cette droite est un axe principal central d'inertie. La Dynamique générale enseigne que dans ces conditions l'axe est permanent, et que la rotation continue à s'effectuer autour de lui. Le mouvement du centre considéré comme rectiligne n'est, du reste, pas dévié par une force située dans sa direction et ne subit aucune influence d'un couple quel qu'il soit. Par suite, les conditions du mouvement tendront à rester les mêmes ; et si aucune autre circonstance n'intervenait, le mobile devrait atteindre le but.

Supposons au contraire le projectile animé d'une rotation autour d'un axe différent de la vitesse de son centre. La composition des vitesses de translation et de rotation

ne s'accomplira plus d'une manière symétrique. Les frottements, qui sont fonctions de la vitesse (414), ne donneront donc plus un couple perpendiculaire à la direction du mouvement, mais généralement, comme tout système de forces, un couple et une résultante. Dès lors la rotation s'effectuera autour d'axes variables. De plus, le centre, qui se meut sous l'action directe de toutes les forces extérieures, éprouvera une déviation de la part de la résultante des frottements, de sorte que le mobile n'atteindra plus le but.

C'est donc dans les premières conditions qu'il faut placer le projectile. Pour y arriver, on le munit d'ailettes engagées dans des rainures pratiquées à la paroi de l'âme de la pièce, suivant un arc d'hélice. Le mobile ne peut plus dès lors acquérir une vitesse de translation suivant l'axe de la pièce, sans prendre en même temps une rotation autour de cette droite. Tel est, pour le réduire à sa plus simple expression, le principe de l'emploi des armes rayées.

§ III.

LOIS DE LA RÉSISTANCE DES MILIEUX.

419. Les premiers essais sur la résistance des milieux remontent à Galilée et à Léonard de Vinci. Ce sujet important est devenu depuis l'objet de théories dues à Newton, Daniel Bernoulli, Euler, Navier, Poisson, et d'expériences de la part de Robins, Hutton, Borda, Dubuat, Bossut, Condorcet, d'Alembert, et de MM. Duchemin, Russel, Piobert, Morin et Didion (1). M. le général Poncelet a donné depuis une monographie très-circonstanciée de ces divers travaux.

(1) On peut citer encore parmi les nombreux expérimentateurs qui se sont

Ce sujet est l'un des plus compliqués que puissent attaquer les efforts réunis de la théorie et de l'expérience. Son état actuel est encore extrêmement imparfait. J'indiquerai cependant les résultats qui paraissent le mieux établis.

420. Supposons, pour fixer les idées sur le cas le plus simple, un corps symétrique autour d'un axe, et animé d'une translation suivant cet axe. Si nous circonscrivons à la surface un cylindre dans la direction de l'axe, il la divisera en deux parties, l'une antérieure appelée la *proue*, l'autre postérieure nommée la *poupe*. L'aire de la section droite de ce cylindre porte le nom de *maître couple*.

Lorsque le solide s'avance dans un milieu que nous supposerons indéfini, il est contraint pour se frayer un passage de déplacer les molécules fluides qui se trouvent directement sur sa route, et par contre-coup d'ébranler le milieu dans une largeur sans limites. Le fluide acquiert donc une quantité de mouvement qu'il ne possédait pas et par suite le solide doit perdre de la sienne. En effet, la somme des quantités de mouvement du solide et du milieu, prises ensemble et projetées sur la direction de l'axe, doit rester constante, attendu qu'il ne se développe entre eux que des forces d'action et de réaction. Si donc on veut entretenir le mouvement du corps d'une manière uniforme, il sera nécessaire d'exercer incessamment sur lui une force. C'est elle que l'on nomme, en la prenant en sens contraire, résistance du milieu.

Cette force sera, d'après la symétrie des circonstances, dirigée suivant l'axe. Elle sera constante si nous supposons établi l'état de régime en faisant abstraction de la mise en train. Pour la trouver, nous appliquerons encore le même

---

occupés de ce sujet : Desaguilliers, Venturi, Bessel, Savard, Sabine, Barly, Macneill, Beaufoy, Lechevalier, Thibault, de Pambour, Rouse, Morosi, Chintran, Marguerie, d'Aubuisson, Maguès, etc.

théorème, mais au fluide seul. La somme des impulsions des forces extérieures qui lui sont appliquées, projetées sur l'axe, se réduit à celle de la force en question, puisque celle-ci, prise en sens contraire, est équivalente sur le solide aux actions du fluide. En appliquant le théorème pendant l'unité de temps, cette impulsion, qui est le produit de la force constante par le temps, se réduira à l'intensité cherchée. Le théorème exprime qu'elle est égale à l'accroissement de la quantité de mouvement projetée sur la même direction. De là cette conclusion rigoureuse : la résistance du milieu est égale à la quantité de mouvement communiquée au milieu, en l'estimant suivant la direction de l'axe et pendant l'unité de temps.

421. Cherchons à nous rendre compte des éléments dont dépend cette quantité de mouvement. Elle est de la forme mv. Le facteur m se rapportant à ce qu'on peut appeler la masse influencée dans l'unité de temps, on doit admettre qu'il est lui-même en raison de la vitesse de marche. Par suite, la résistance varie en raison du carré de la vitesse v.

Le même corps se déplaçant dans des milieux de densités différentes, la masse influencée, qui reste la même sous le rapport géométrique, varie comme la densité. Donc la résistance est en raison de la masse spécifique μ du milieu (¹).

Si enfin des corps semblables viennent à prendre le même mouvement, toutes les circonstances géométriques resteront semblables, et le phénomène sera seulement amplifié dans ses dimensions. Mais l'ébranlement occasionné par le

(¹) Il est important, pour les valeurs numériques que nous donnerons plus loin, de ne pas confondre la masse spécifique, c'est-à-dire la masse comprise sous l'unité de volume, avec le poids spécifique ou avec la densité qui lui sont seulement proportionnels.

passage du maître couple est en raison de sa surface. Donc la résistance varie proportionnellement à la section A du maître couple (¹).

422. Si donc λ désigne un coefficient constant, on peut

(¹) Ces raisonnements élémentaires sont au fond un peu superficiels pour un sujet aussi délicat que la question de la similitude en Mécanique. Il convient d'invoquer à cet égard le théorème de Newton dont je rappellerai l'énoncé :

Si l'on envisage deux phénomènes dynamiques semblables, c'est-à-dire tels, que les espaces, les temps, les forces et les masses homologues conservent des rapports constants, les quatre rapports de similitude e, t, f, m ne peuvent être laissés quelconques; il existe toujours entre eux la relation nécessaire

$$me = ft^2.$$

Si, au lieu de ces rapports de similitude, nous en introduisons d'autres mieux adaptés à la question actuelle, à savoir ceux des surfaces, des vitesses et des densités, ils seront reliés aux précédents par les formules

$$s = e^2, \quad v = \frac{e}{t}, \quad d = \frac{m}{e^3},$$

d'où

$$e = \sqrt{s}, \quad t = \frac{\sqrt{s}}{v}, \quad m = ds\sqrt{s}.$$

L'équation de Newton devient alors

$$f = dsv^2.$$

Si donc nous imaginons deux mouvements semblables s'effectuant avec des vitesses V, V′ des maîtres couples S, S′ dans des milieux de densités D, D′, opposant des résistances F, F′; les rapports de similitude seront

$$f = \frac{F}{F'}, \quad d = \frac{D}{D'}, \quad s = \frac{S}{S'}, \quad v = \frac{V}{V'},$$

et par suite on aura

$$\frac{F}{F'} = \frac{DSV^2}{D'S'V'^2},$$

c'est-à-dire, en désignant par C une constante,

$$F = CDSV^2,$$

ce qu'il fallait démontrer.

admettre pour la résistance des milieux l'expression

$$F = \lambda \mu A v^2.$$

Ce coefficient changera évidemment avec la forme géométrique du corps, mais il ne paraît pas que la nature des substances doive avoir sur lui d'influence. Il reste à savoir quelles sont, d'après les expériences, les différentes circonstances qui peuvent faire varier sa valeur.

423. *Influence de la proue.* — Une forme aiguë atténue la résistance, en ménageant de plus loin le passage du maître couple.

On peut en juger par les résultats suivants, déduits par Bossut, d'Alembert et Condorcet, d'expériences faites sur de petits modèles :

Plan mince.....	$\lambda = 0{,}62$
Cône de 156°.....	$\lambda = 0{,}59$
Cône de 132°.....	$\lambda = 0{,}53$
Cône de 108°.....	$\lambda = 0{,}43$
Cône de 84°.....	$\lambda = 0{,}33$
Cône de 60°.....	$\lambda = 0{,}27$
Cône de 36°.....	$\lambda = 0{,}25$
Cône de 12°.....	$\lambda = 0{,}24$
Sphère.....	$\lambda = 0{,}30$

Je citerai encore, d'après MM. Piobert, Morin et Didion, l'exemple du parachute ou de la calotte sphérique concave ou convexe, suivant le sens où on la fait agir :

Plan mince.....	$\lambda = 0{,}62$
Parachute concave.....	$\lambda = 1{,}20$
Parachute convexe.....	$\lambda = 0{,}48$

Bossut admettait pour la forme du vaisseau de ligne un coefficient compris entre 0,09 et 0,12. Les formes actuelles de la navigation à vapeur permettent de l'abaisser presque à 0,03 ou environ $\frac{1}{30}$ de la résistance du plan mince.

424. *Influence de la poupe.* — Lorsque la poupe s'allonge en devenant plus aiguë, la résistance diminue sensiblement, ce qu'on peut attribuer à l'atténuation du remous qui se produit dans le vide laissé à l'arrière.

Pour donner une idée de cette influence, je citerai ces résultats de Bossut, d'Alembert et Condorcet :

Plan mince..... $\lambda = 0{,}62$
Cône de 96°..... $\lambda = 0{,}55$
Cône de 48°..... $\lambda = 0{,}53$
Cône de 24°..... $\lambda = 0{,}52$

J'indiquerai encore les nombres suivants, donnés par Dubuat et vérifiés par le colonel Duchemin. Ils sont relatifs à des prismes caractérisés par le rapport de leur longueur à leur largeur :

Plan mince... ... $\lambda = 0{,}620$
Prisme de 1..... $\lambda = 0{,}580$
Prisme de 2..... $\lambda = 0{,}554$
Prisme de 3..... $\lambda = 0{,}550$

Au delà du rapport 2,57, l'effet inverse se manifeste et la résistance augmente, ce qu'on doit attribuer à la prépondérance que prend alors le frottement le long des parois sur l'avantage réalisé au point de vue du remous.

425. *Influence du mouvement absolu.* — Les expériences de Dubuat ont mis en évidence l'existence de la *proue fluide*, c'est-à-dire d'une masse fluide qui reste adhérente à l'avant du corps et qui forme comme une annexe de la proue. Pour des sphères, par exemple, le volume du fluide adhérent est de 0,585 de celui de la sphère.

Les choses ne se passent pas de la même manière lorsque le corps est en mouvement dans un fluide stagnant, comme c'est le cas pour un navire, ou lorsqu'un milieu mobile vient agir sur un obstacle fixe, comme pour les cou-

rants d'eau ou d'air. Dans ce dernier cas la proue fluide s'écrase davantage. Il s'ensuit une différence de résistance que nous mettrons en évidence au moyen des nombres suivants, relatifs au plan mince :

Corps mobile..... $\lambda = 0{,}62$
Courant mobile..... $\lambda = 0{,}92$

426. *Influence de la vitesse.* — Les expériences de Robins et de Hutton ont montré que la loi précédente, convenablement vérifiée pour des vitesses ordinaires comprises entre 1 et 8 mètres, ne s'appliquait plus exactement pour des vitesses excessives. On peut cependant conserver la même formule en déterminant le coefficient λ d'après la vitesse moyenne que l'on veut considérer. Les nombres suivants sont relatifs à des sphères :

$v =$ 1^m..... $\lambda = 0{,}30$
$v =$ 3..... $\lambda = 0{,}31$
$v =$ 5..... $\lambda = 0{,}32$
$v =$ 10..... $\lambda = 0{,}33$
$v =$ 25..... $\lambda = 0{,}34$
$v =$ 50..... $\lambda = 0{,}35$
$v =$ 100..... $\lambda = 0{,}36$
$v =$ 200..... $\lambda = 0{,}39$
$v =$ 300..... $\lambda = 0{,}44$
$v =$ 400..... $\lambda = 0{,}50$
$v =$ 500..... $\lambda = 0{,}52$

427. *Influence de l'étendue du milieu.* — Les raisonnements précédents supposent un milieu indéfini. Si l'on imagine au contraire un piston qui se meuve dans un tube indéfini, il devra déplacer la totalité de la masse fluide, ce qui change complétement la loi de la résistance. Il y a donc lieu de se préoccuper de l'influence de la proximité du bord dans les milieux circonscrits, tels que les cours d'eau.

A cet égard Dubuat a déduit d'expériences antérieures de Bossut, d'Alembert et Condorcet, une limite au delà de laquelle la loi générale s'applique sans modification. Cette limite concerne le rapport des dimensions du milieu et du corps : elle est de $4\frac{1}{7}$ pour la largeur et de 6,46 pour la section. Au-dessous de cette limite, la résistance se trouve augmentée dans le rapport suivant :

$$\frac{8.46}{n+2},$$

en désignant par n le rapport des sections.

§ IV.

EXEMPLES.

428. *Pendule hydraulique.* — Le pendule hydraulique consiste, comme nous l'avons vu (304), en une boule de rayon r et de densité Δ suspendue dans un courant d'eau de vitesse v à un fil qui s'écarte de la verticale sous l'angle α. La tension de ce fil devant faire équilibre à l'action dynamique du fluide et au poids effectif de la boule, $\tang\alpha$ sera le quotient de ces deux forces. La première a pour valeur $\lambda\mu\pi r^2 v^2$ (422). Quant au poids, il doit être réduit, si l'on admet dans ces circonstances le principe d'Archimède, à $(\Delta-1)\mu g.\frac{4}{3}\pi r^3$. On aura de cette manière

$$\tang\alpha = \frac{\lambda\mu\pi r^2 v^2}{\frac{4}{3}\mu g\pi(\Delta-1)r^3} = \frac{3}{2}.\frac{\lambda}{\Delta-1}.\frac{v^2}{2g}.\frac{1}{r}.$$

La tangente de la déviation varie donc en raison inverse

du rayon de la boule, et directe de la hauteur due à la vitesse du courant.

Ce calcul s'appliquera encore si Δ devient inférieur à l'unité, en supposant toujours cette densité rapportée à celle du milieu ambiant. L'appareil prend alors le nom de *ballon captif*.

429. *Parachute.* — Si un corps pesant descend verticalement dans l'air, l'équation différentielle de son mouvement sera

$$M\frac{dv}{dt} = Mg - \lambda\mu A v^2,$$

ou

$$dt = \frac{dv}{g - kv^2},$$

en posant, pour abréger,

$$k = \frac{\lambda\mu A}{M}.$$

Si nous décomposons cette expression de la manière suivante,

$$dt = \frac{1}{2\sqrt{gk}}\left(\frac{dv}{v + \sqrt{\frac{g}{k}}} - \frac{dv}{v - \sqrt{\frac{g}{k}}}\right),$$

elle s'intégrera à l'aide des logarithmes népériens

$$2\sqrt{gk}.t = \log\left(\frac{v + \sqrt{\frac{g}{k}}}{v - \sqrt{\frac{g}{k}}}\right) - \log(-1).$$

Nous déterminons pour plus de simplicité la constante, en

supposant l'absence de vitesse initiale. Il vient enfin

$$2\sqrt{gk}.t = \log\left(\frac{\sqrt{\frac{g}{k}}+v}{\sqrt{\frac{g}{k}}-v}\right)$$

$$\frac{\sqrt{\frac{g}{k}}+v}{\sqrt{\frac{g}{k}}-v} = e^{2\sqrt{gk}.t},$$

$$v = \sqrt{\frac{g}{k}}\cdot\frac{e^{2\sqrt{gk}.}-1}{e^{2\sqrt{gk}.t}+1}.$$

430. Si l'on fait croître le temps indéfiniment, on voit que la vitesse converge vers la limite finie

$$V = \sqrt{\frac{g}{k}} = \sqrt{\frac{Mg}{\lambda\mu A}}.$$

Le mouvement tend donc à devenir sensiblement uniforme.

Tel est le principe de l'emploi du parachute (261). Il a pour but de substituer à un mouvement accéléré, qui amènerait la perte de l'aéronaute, un mouvement sensiblement uniforme qui ne dépasse pas une certaine vitesse. Si P désigne le poids du système et R le rayon du parachute, son maître couple A sera πR^2, et la formule deviendra

$$V = \frac{1}{\sqrt{\lambda\mu\pi}}\cdot\frac{\sqrt{P}}{R}.$$

La vitesse limite est donc en raison directe de la racine du poids et inverse du rayon. On donne, d'après cela, aux parachutes une grande envergure, car le poids est ordinairement imposé par les circonstances.

431. *Criblage à la cuve.* — Dans la préparation méca-

nique qui précède la fusion des minerais, on se livre à trois opérations principales : on réduit la matière en morceaux dans un bocard ; on groupe ces morceaux par ordre de grosseur sur des cribles ; on les répartit enfin en couches horizontales par ordre de densité, c'est-à-dire par nature de substances. Ce triage se fait à l'aide de cuves à secousses, dont les mouvements brusques remettent constamment les matières en suspension dans l'eau pour les laisser ensuite descendre d'elles-mêmes. C'est sur cette opération qu'il faut porter notre attention.

Les morceaux prendront, d'après ce qui précède, des vitesses sensiblement uniformes représentées par la formule

$$V = C\frac{\sqrt{P}}{R},$$

C désignant une constante, P le poids effectif du corps (en ayant égard à la diminution qu'il subit dans l'eau), et R une dimension homologue prise dans les différents morceaux, que nous supposerons semblables pour fixer les idées. La condition pour que deux morceaux prennent la même vitesse pour venir s'établir dans la même couche du dépôt est donc

$$\frac{\sqrt{P}}{R} = \frac{\sqrt{P'}}{R'}.$$

Or, si Δ désigne la densité, P est proportionnel à $R^3(\Delta - 1)$. Il vient par suite, en élevant au carré,

$$R(\Delta - 1) = R'(\Delta' - 1),$$

$$\frac{R}{R'} = \frac{\Delta' - 1}{\Delta - 1}.$$

Tel est donc le rapport qui doit exister entre les dimensions pour compenser la différence de densité et amener les deux morceaux dans la même couche.

Mais on veut, au contraire, que les densités se séparent par couches. Il faut donc donner à tous les morceaux ou la même dimension, ou des dimensions dont les limites extrêmes n'atteignent pas ce rapport. Et comme c'est le criblage qui détermine l'association préalable des morceaux que l'on soumet ensemble à l'opération de la cuve, nous obtenons par là la limite de resserrement qu'il faut établir entre les diamètres des trous des deux cribles consécutifs destinés à séparer le trop gros et le trop fin de la masse soumise au lavage. Ce rapport étant constant, on voit que l'échelle des cribles formera une progression géométrique.

CHAPITRE XXVII.

RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX.

§ I.

TRACTION.

432. PRÉLIMINAIRES. — Il nous reste à aborder un dernier ordre de considérations (1) pour déterminer les dimensions qu'il est nécessaire de donner aux pièces, afin d'éviter qu'elles ne rompent sous les efforts qu'elles sont appelées à transmettre, ou qu'elles n'en éprouvent dans leur forme ou leur structure moléculaire une altération notable.

La voie la plus naturelle consisterait dans l'emploi de la théorie mathématique de l'élasticité. Mais cette partie de la Mécanique, quoique fort élégante, ne se prête encore qu'au prix de grandes difficultés d'analyse à l'étude des cas les plus simples. D'autre part, si l'on remarque que, quand bien même on parviendrait à trouver la valeur rigoureuse des dimensions théoriques, on s'empresserait cependant d'y ajouter un appoint considérable pour faire la part des circonstances imprévues, il devient évident qu'il suffira d'obtenir une limite inférieure de ces dimensions. La ques-

(1) La théorie de la résistance des matériaux, fondée sur les méthodes d'approximation, a reçu de grands développements, en ce qui concerne les constructions fixes. Je me bornerai ici aux indications qui se rapportent spécialement aux pièces de machines.

tion change alors tout à fait de nature, et des méthodes approximatives, dirigées avec le soin convenable, rempliront parfaitement le but.

433. *Formule théorique.* — Le cas le plus simple est celui d'une pièce prismatique, sollicitée suivant sa longueur par une force F qu'elle tient en équilibre par ses réactions moléculaires. Nous chercherons donc en premier lieu la relation de la tension F aux éléments de la tige, à savoir : sa section A, sa longueur l dans l'état naturel, et son allongement variable x.

Si nous imaginons deux tiges identiques accolées l'une à l'autre, elles développeront deux forces égales F. Si donc on les réunit en une seule de section 2A, les deux forces se réduiront de leur côté à une seule égale à 2F. On voit dès lors, en étendant ce raisonnement d'une manière générale, que la tension sera proportionnelle à l'aire de la section.

Si, d'un autre côté, à l'extrémité d'une première tige, nous en adaptons une autre pareille en négligeant l'influence de son poids, on pourra les considérer comme ne formant qu'une seule tige dont la longueur naturelle serait $2l$. La tension de la seconde tige, à son origine, permet alors de supprimer la force F qui était directement appliquée à la première, de sorte qu'il ne reste qu'une seule force F. Mais la longueur naturelle est devenue $2l$ et l'allongement total $2x$; leur rapport n'a pas changé, et est encore $\frac{x}{l}$. Ainsi, quand ce rapport reste constant, la force ne varie pas non plus. Il est clair du reste que si l'on déterminait un autre allongement $\frac{x}{l}$, il faudrait aussi modifier l'effort, et par conséquent cette force est une fonction de $\frac{x}{l}$.

On peut donc écrire

$$F = A f\left(\frac{x}{l}\right).$$

Si nous développons cette fonction inconnue par la formule de Mac Laurin, qu'on peut toujours invoquer pour les faibles allongements, il viendra

$$f\left(\frac{x}{l}\right) = f(0) + \left(\frac{x}{l}\right) f'(0) + \frac{x^2}{l^2}\,\frac{f''(0)}{1.2} + \ldots.$$

Mais la force étant nulle dans l'état naturel, on doit avoir $f(0) = 0$ et la série ne commence qu'au terme du premier degré. Nous pouvons donc, en nous bornant aux faibles déformations, les seules que la pratique puisse admettre, négliger les termes d'ordre supérieur et écrire simplement

$$F = EA\frac{x}{l}, \tag{1}$$

en désignant par E le facteur constant qu'on appelle coefficient d'élasticité.

434. Lorsque la tige sera sollicitée en divers points par plusieurs forces F', F'', F''', ..., son état variera d'une manière discontinue en chacun de ces points, et la formule deviendra pour chaque segment

$$\sum F = EA\frac{x}{l},$$

le signe $\sum$ s'étendant seulement à toutes les forces qui sont appliquées au delà du segment, sans faire aucune acception de celles qui sont situées en deçà.

La *fatigue* de la pièce, si on la mesure par l'allongement proportionnel, sera d'après cela

$$\phi = \frac{\Sigma F}{EA}.$$

Elle diminue donc à partir de l'encastrement à mesure qu'on franchit le point d'application de chacune des forces. On peut alors diminuer la section d'une manière correspondante : c'est ce qui arrive, par exemple, pour les *maîtresses tiges* des répétitions de pompes dans les mines.

435. On peut évaluer, à l'aide de cette formule, le travail nécessaire pour la compression d'un ressort. Ce sera évidemment

$$\int_0^x \mathrm{F}\,dx = \int_0^x \frac{\mathrm{EA}\,x}{l}\,dx = \frac{\mathrm{EA}\,x^2}{2l}.$$

Si donc i désigne la limite d'allongement proportionnel jusqu'à laquelle la formule peut être employée sans erreur sensible et la matière déformée sans inconvénient, le maximum du travail que pourra supporter le ressort sera

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{EA}\,i^2 l,$$

ou

$$\frac{\mathrm{E}\,i^2\,\mathrm{V}}{2},$$

si V désigne le volume du ressort.

Comme la demi-variation de force vive est égale au travail développé, on voit que la force vive que l'on pourra détruire par l'intermédiaire d'un *tampon de choc* (284) aura pour valeur

$$\mathrm{E}\,i^2\,\mathrm{V}.$$

L'efficacité d'un tampon est donc proportionnelle à son volume.

436. Données expérimentales. — Les considérations que nous avons employées ne peuvent être prises que comme des aperçus propres à nous guider vers la forme analytique (1) de la relation cherchée; mais cette formule ne doit être acceptée que sous le contrôle de l'expérience. Indiquons ce que l'observation nous a appris à cet égard.

M. Eaton Hodgkinson a étudié les déformations que subit une tige de fer sous l'action de poids croissants que l'on soutient pendant l'allongement, de manière à éviter la

production de force vive, qui changerait complétement le phénomène (467). On distingue dans l'allongement total une première partie, qu'on appelle *élastique*, et qui disparaît quand la tige est abandonnée à elle-même, et, en outre, la partie *permanente*, qui subsiste en raison du défaut d'élasticité. En calculant d'après ces éléments la valeur de E, qui devrait être une constante absolue d'après la théorie précédente, M. Hodgkinson a formé le tableau suivant :

CHARGES.		ALLONGEMENTS PROPORTIONNELS EN MILLIÈMES DE LA LONGUEUR NATURELLE. $l = 15^m$, $A = 135^{mmq},4$.			COEFFICIENT E RAPPORTÉ AU MÈTRE CARRÉ ET AU KILOGRAMME, ÉVALUÉ D'APRÈS L'ALLONGEMENT :	
En kilogr. par millim. carré.	Proportionnelles.	Total.	Permanent.	Élastique	Total.	Élastique.
1,87	1	0,082	0,000	0,082	228.10^6	228.10^6
3,75	2	0,185	0,000	0,185	202.10^6	202.10^6
5,62	3	0,284	0,003	0,281	198.10^6	200.10^6
7,50	4	0,380	0,003	0,377	198.10^6	199.10^6
9,37	5	0,475	0,004	0,471	197.10^6	199.10^6
11,25	6	0,571	0,005	0,566	197.10^6	199.10^6
13,12	7	0,666	0,007	0,659	197.10^6	199.10^6
15,00	8	0,760	0,010	0,750	193.10^6	200.10^6
16,87	9	0,863	0,033	0,840	193.10^6	201.10^6
18,75	10	1,013	0,083	0,930	184.10^6	202.10^6
20,64	11	1,283	0,262	1,021	161.10^6	202.10^6
22,50	12	2,360	1,130	1,230	95.10^6	183.10^6
24,37	13	4,287	3,071	1,216	56.10^6	200.10^6
26,25	14	9,951	8,574	1,377	29.10^6	191.10^6
28,12	15	10,493	9,102	1,391	27.10^6	200.10^6
30,00	16	17,888	16,515	1,373	17.10^6	218.10^6
31,87	17	21,486	19,795	1,691	15.10^6	189.10^6
33,75	18	24,774	22,709	2,065	14.10^6	163.10^6
35,62	19	34,985	32,870	2,115	10.10^6	170.10^6
37,46	20	Rupture.	Rupture.	Rupture.	Rupture.	Rupture.

On peut distinguer dans ce tableau deux périodes. La première s'étend jusqu'à la charge de 17 kilogrammes par millimètre carré. Le coefficient E n'est pas dans cet intervalle absolument constant, mais sa variation est peu sensible et assez régulière. On peut prendre comme valeur moyenne et en nombre rond 2.10^{10}.

L'allongement permanent est en même temps très-faible, et ne dépasse pas $\frac{1}{50}$ de l'allongement total. Son effet est, en quelque sorte, de constituer une nouvelle substance sur laquelle de nouvelles charges ne produisent plus d'allongement permanent, à moins d'être supérieures à l'ancienne.

La seconde période s'étend depuis ce point jusqu'à la rupture. Le coefficient varie alors beaucoup et d'une manière irrégulière. Ce fait n'a rien qui doive surprendre. Mais il impose la nécessité de rester, pour les applications, dans la première période. Sous cette réserve, nous pourrons donc employer convenablement la formule précédente (1).

187. Les autres matériaux présentent des circonstances analogues.

La fonte est une substance éminemment variable dans sa nature physique et chimique. C'est ce qui peut expliquer les écarts des différents expérimentateurs. Le coefficient anciennement adopté étant, sauf le facteur 10^8, représenté par le nombre 12, Stephenson a indiqué la valeur 8, Desplaces et Collet-Meygret de 3 à 12, et en moyenne 6.

Pour les bois, d'après MM. Chevandier et Wertheim, le coefficient diminue à partir d'un certain âge. La sécheresse du sol et l'exposition du nord tendent à l'augmenter. Sa valeur, sauf le facteur 10^8, est de 9 à 12.

En résumé, on peut indiquer, comme valeurs moyennes,

les nombres suivants :

Fer.....	$\frac{E}{10^3} = 190$ à 130
Fonte.....	30 à 120
Bois.....	9 à 12

438. *Compression.* — On peut encore agir dans la direction même d'une tige, mais par compression. Il est alors nécessaire, pour éviter de voir la pièce *fouetter*, de la maintenir par des guides, ou de ne lui donner qu'une longueur très-restreinte par rapport à la largeur.

On peut reproduire les mêmes considérations théoriques, et l'expérience indique que la formule (1) est encore applicable dans les mêmes limites. M. Hodgkinson a pensé, toutefois, qu'il était convenable de diminuer de 15 à 20 pour 100 le coefficient du fer, pour passer de la dilatation à la compression, et seulement de quelques centièmes pour la fonte. Mais ce fait aurait besoin d'être mieux établi.

439. *Rupture.* — Un phénomène plus essentiel est celui de la rupture qui se produit quand la charge devient excessive.

On doit éviter, dans la pratique, d'atteindre et même d'approcher de beaucoup de ce point. L'usage, pour la traction directe comme pour tout autre mode de fatigue, est de ne pas dépasser $\frac{1}{6}$ à $\frac{1}{10}$ de la charge de rupture. On peut indiquer, à cet égard, les nombres suivants, rapportés au kilogramme par millimètre carré :

	Limite inférieure.	Valeur moyenne.	Limite supérieure.
Fer en fil.....	50	70	90
Fer en barre.....	25	40	60
Fer en tôle.....	35	38	40
Acier.....	36	»	100
Fonte.....	0	»	14
Cuivre.....	26	»	30
Chêne ou sapin du Nord.	6	»	9
Sapin des Vosges.....	»		
Courroie en cuir.....	»	2	»

D'après Coulomb, les cordes peuvent porter de 50 à 60 kilogrammes par fil de caret de 8 millimètres de diamètre, tordu directement et employé avec d'autres pour former la corde.

M. Vickers a étudié récemment l'influence exercée sur le point de rupture des aciers par le degré de carburation. Il été conduit aux résultats suivants :

DIX-MILLIÈMES DE CARBONE.	EFFORT DE RUPTURE EN KILOGRAMMES PAR MILLIMÈTRE CARRÉ.	ALLONGEMENTS EN MILLIÈMES DE LA LONGUEUR NATURELLE.
38	48	34,8
43	53	34,8
48	59	31,8
53	67	28,5
63	70	25,4
74	71	17,5
84	86	28,5
100	94	25,4
125	108	15,8

La vigueur augmente donc pour le fer avec le degré d'aciération jusqu'à $1\frac{1}{4}$ pour 100 de carbone. On la voit ensuite diminuer, quand on incline davantage vers la nature de la fonte.

Quant à ce qui concerne la rupture par compression d'un prisme trop court pour fléchir, j'indiquerai les résultats suivants :

Fer	25
Fonte	63
Chêne, sapin du Nord	4,5

La température a sur ces effets une influence qu'il est

essentiel de prendre en considération dans les machines à feu. Cette action est certaine, mais les nombres suivants auraient peut-être besoin du contrôle de nouvelles expériences. J'ajoute qu'ils sont simplement proportionnels et sans valeur concrète.

Température centigrade.	Tôle de fer.	Cuivre.
0.....	1,000	1,00
100.....	1,197	0,95
150.....	»	0,90
200.....	1,080	0,85
250.....	»	0,80
300.....	0,950	0,67
350.....	0,980	»
400.....	»	»
450.....	0,930	»
500.....	0,760	»
550.....	»	0,32
600.....	0,520	»
650.....	»	»
700.....	0,350	»

§ II.

FLEXION.

440. Fibre neutre. — Les pièces de machines sont le plus ordinairement symétriques, et sollicitées par des forces comprises dans le plan de symétrie. Il demeure dès lors évident que la déformation s'opérera dans le plan même.

Nous supposerons d'abord, pour nous placer dans le cas le plus simple, un prisme sollicité par des forces perpendiculaires à la longueur.

Les calculs suivants sont fondés sur une hypothèse très-simple, qui a, du reste, subi le contrôle de l'expérience.

Nous supposerons, en premier lieu, que les molécules situées dans une section droite du prisme restent, après la flexion, dans un même plan normal au profil longitudinal de la pièce : c'est ce qu'on appelle le principe de la conservation des tranches. Nous admettrons, en second lieu, que les fibres formées par les molécules alignées suivant des droites parallèles aux arêtes du prisme se comportent comme si elles étaient seules, en s'allongeant ou se raccourcissant suivant la formule fondamentale (1).

441. Faisons une section normale MG et envisageons la portion comprise entre elle et l'extrémité. Deux groupes de forces concourent à son équilibre : en premier lieu, les efforts F appliqués à des distances Δ de l'origine (*Pl. IV, fig.* 61), et, par suite, à des bras de levier $\Delta - x$ de la section considérée, si x désigne son abscisse : ces distances ne sont que peu modifiées par la flexion qui s'exerce dans un sens perpendiculaire, et nous pourrons faire abstraction de cette variation; en second lieu, les forces d'élasticité qui sont développées dans la section même par la première partie du prisme.

Si nous projetons sur la tangente, les forces F disparaissent, puisqu'elles restent sensiblement normales, et l'équation ne renferme que les forces d'élasticité. Leur somme de projections étant dès lors nulle, elles doivent être équivalentes à un couple qui sera situé dans le plan de flexion, en raison de la symétrie. Si, en second lieu, nous posons l'équation des moments, par rapport à un axe transversal pris dans la section fixe, elle nous apprendra que le moment de ce couple est égal à la somme $\Sigma F(\Delta - x)$ des moments de toutes les forces appliquées.

442. Puisque les forces d'élasticité forment un couple, il s'en développe nécessairement dans les deux sens. Il y a

donc des fibres étendues et d'autres comprimées, et, par suite, il en existe une intermédiaire qui conserve sa longueur naturelle, et que l'on appelle la *fibre neutre*. C'est elle qui pourra servir à caractériser la figure de la pièce après déformation. Nous résoudrons, pour cela, deux questions successives : trouver, d'une part, la position de la fibre neutre dans les différentes sections au moyen de l'équation de projections tangentielles, et, en second lieu, sa figure dans l'espace, d'après l'équation des moments.

443. Remarquons que toutes les fibres constituent, d'après l'hypothèse de la conservation des tranches, des développantes d'une même développée, puisqu'elles conservent leurs distances normales. Si donc ρ est le rayon de courbure de la fibre neutre GG′, $\rho + \nu$ sera celui de la fibre quelconque MM′, qui en est distante, dans l'état naturel, de MG $= \nu$.

Prenons une section voisine qui coupe la première au centre de courbure O, et soit λ la distance naturelle de ces tranches. Elle exprimera encore, après la flexion, la longueur GG′ de la fibre neutre dans cet intervalle, puisque celle-ci ne subit aucune altération. On aura, en assimilant les arcs des deux fibres à leurs cercles osculateurs,

$$\frac{MM'}{GG'} = \frac{MO}{GO},$$

d'où

$$MM' = GG' \cdot \frac{MO}{GO} = \lambda \frac{\rho + \nu}{\rho} = \lambda + \frac{\nu\lambda}{\rho}.$$

La variation subie par MM′, qui était primitivement égale à λ, est donc $\frac{\nu\lambda}{\rho}$, et son allongement proportionnel $\frac{\nu}{\rho}$. La tension sera dès lors, d'après la formule fondamentale (1), $E a \frac{\nu}{\rho}$, en désignant par a la section de la fibre. Si donc ces

forces forment un couple, on doit avoir

$$\Sigma E a \frac{v}{\rho} = 0,$$

c'est-à-dire, puisque E et ρ sont des constantes pour toutes les fibres dans la section considérée,

$$\Sigma a v = 0.$$

Le moment total des éléments de la section est donc nul, par rapport à la fibre neutre, ce qui prouve que celle-ci passe par le centre de gravité. Comme nous avons raisonné, du reste, pour une tranche quelconque, il s'ensuit que la fibre neutre est le lieu des centres de gravité de toutes les sections. La première question se trouve par là résolue.

444. L'équation des moments relatifs à l'intersection de la fibre neutre par le plan de la section considérée sera

$$(2) \qquad \Sigma F (\Delta - x) = \Sigma E a \frac{v}{\rho} \cdot v = \frac{E}{\rho} \Sigma a v^2 = \frac{E\mu}{\rho}.$$

Dans cette formule, μ désigne le moment d'inertie de l'aire de cette section, pris par rapport à l'axe qui serait mené par son centre de gravité perpendiculairement au plan de symétrie, et que nous appellerons l'*axe neutre*.

On doit voir dans cette formule l'équation de la fibre neutre. Si, par exemple, les forces extérieures forment un couple, le premier membre devient constant pour toutes les sections situées en deçà de ce couple, car il se réduit au moment du couple. On a donc

$$\rho = \text{const.}$$

et, par suite, toute cette portion affecte la forme circulaire.

Pour mettre cette relation sous la forme d'une équation différentielle, remplaçons le rayon de courbure par sa

valeur

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

et par approximation

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{dx^2};$$

car l'inclinaison $\frac{dy}{dx}$ varie peu puisqu'on suppose la déformation peu sensible, et, à ce titre, son carré disparaît devant l'unité. La formule devient ainsi

$$E\mu \frac{d^2y}{dx^2} = \Sigma F(\Delta - x),$$

et l'on en tire par une double intégration

$$E\mu y = \int\int dx^2 \sum F(\Delta - x). \tag{3}$$

Telle est l'équation de la fibre neutre, qui résout la seconde question.

On remarquera, comme ci-dessus (434), que cette formule est discontinue, car le signe $\sum$ ne s'étend qu'aux forces comprises entre le point considéré et l'extrémité de la pièce. Le second membre perd donc un terme chaque fois que l'on franchit le point d'application d'une force, et la forme du profil change avec lui.

445. FATIGUE. — Si nous voulons, en outre, nous rendre compte des tensions développées, il suffira d'en chercher le maximum pour constater qu'il ne dépasse pas la limite que comporte la substance employée (439).

Nous avons vu que la fatigue φ, exprimée par l'allongement proportionnel de chaque fibre, a pour valeur (2)

$$\varphi = \frac{v}{\rho} = \frac{v\Sigma F(\Delta - x)}{E\mu}.$$

Son maximum se trouve en général (¹) dans l'encastrement où le signe $\sum$ s'étend au plus grand nombre de forces et où leurs bras de leviers prennent leur plus grande valeur Δ.

Dans cette section, la plus grande fatigue correspondra évidemment aux points les plus éloignés de la fibre neutre, c'est-à-dire de l'axe neutre. Ce maximum a donc pour expression

$$\Phi = \frac{V \cdot \Sigma F \Delta}{E\mu}, \tag{4}$$

si V représente la plus grande ordonnée de la section. Il sera par suite nécessaire et suffisant d'avoir

$$\Phi < i,$$

en désignant par i la limite de fatigue que l'on doit s'imposer pour les différents matériaux (439).

446. Si, pour caractériser le prix de revient ou la quantité de matière employée, nous nous donnons l'aire de la section, nous resterons encore maîtres d'atténuer la fatigue en donnant à cette section une forme appropriée. Il faut pour cela éloigner autant que possible de l'axe neutre les différents éléments de cette surface. On augmente, à la vérité, par là le numérateur en raison de la première puissance des dimensions à cause du facteur V; mais on fait aussi varier le dénominateur dans l'ordre du carré, à cause du facteur μ, et, en définitive, la valeur de Φ se trouve atténuée.

Si, par exemple, on veut employer la forme rectangu-

(¹) Je dis *en général*, car il peut arriver que certaines forces soient de sens contraire et tendent à diminuer au contraire la somme des moments. Mais il est toujours alors bien facile de trouver le maximum du second membre.

laire, il faudra placer sa grande largeur dans le plan de flexion. C'est pour cette raison qu'on arme de *nervures* les pièces destinées à résister à la flexion. On fera mieux encore en évidant le rectangle pour augmenter ses dimensions, sans changer sa surface. Si ensuite on réunit dans le plan de symétrie, en une seule flasque, les deux montants du rectangle creux, on leur donne par là plus de fermeté et on obtient le *double T*

comme dans les *balanciers* des machines de rotation. Si l'on emploie des formes rondes, il faudra les creuser au centre. Les sections elliptiques devront de même être évidées et placées de manière que le grand axe se trouve dans le plan de flexion.

447. Cependant cette règle n'est utile que pour une matière telle que la fonte, que l'on peut disposer par le moulage suivant toutes les formes voulues. Mais avec le bois, par exemple, tout ce qu'on ôterait pour évider la section dans le centre serait en pure perte, et il vaut encore mieux conserver la forme pleine. Comme celle-ci est toujours un rectangle dans la pratique et que la forme naturelle d'un tronc d'arbre est circulaire, on peut se demander quel est le rectangle qu'il sera, à ce point de vue, le plus avantageux d'inscrire dans le cercle.

Il suffit pour cela de calculer la quantité $\frac{\mu}{V}$ et de la rendre maximum. Or, si nous appelons a et b les demi-dimensions du rectangle en hauteur et en largeur, nous aurons

$$V = a,$$

$$\mu = \int_{-}^{+a} 2b \cdot dv \cdot v^2 = \frac{4}{3} a^3 b,$$

$$\frac{\mu}{V} = \frac{4}{3} a^2 b.$$

Nous poserons donc

$$a^2 b = \text{max.}$$

avec la condition

$$a^2 + b^2 = \text{const.} = r^2$$

pour que le rectangle ne cesse pas d'être inscrit dans le cercle. On tire de là

$$2abda + a^2 db = 0,$$
$$2ada + 2bdb = 0,$$

et en éliminant le rapport différentiel,

$$-\frac{2b}{a} = -\frac{a}{b},$$
$$a^2 = 2b^2,$$

d'où

$$3b^2 = r^2,$$
$$b = \frac{r}{\sqrt{3}}.$$

Il suffira, pour construire cette valeur, de partager un diamètre en trois parties égales et de lui élever, de part et d'autre, des perpendiculaires par les points de division; elles marqueront sur le cercle les deux autres sommets du rectangle.

§ III.

EXEMPLES.

448. Pour éclaircir ces généralités, je présenterai quelques exemples, en choisissant pour cela les cas les plus simples et les plus fréquemment réalisés par les pièces de machines.

EXEMPLE I. — *Pièce encastrée et sollicitée à son extrémité* (*Pl. IV, fig.* 61).

Équation de la fibre neutre (3) :

$$E\mu \frac{d^2y}{dx^2} = F(l - x).$$

Si nous intégrons sans constante pour exprimer que y et $\frac{dy}{dx}$ sont nuls en même temps que x, c'est-à-dire que la pièce est encastrée à l'origine, il viendra

$$E\mu y = F\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right).$$

Valeur de la flèche. — Nous l'obtiendrons pour l'extrémité en faisant $x = l$:

$$f = \frac{Fl^3}{3E\mu}.$$

Valeur de la fatigue. — Elle correspond à l'encastrement (4):

$$\Phi = \frac{VFl}{E\mu}.$$

449. Exemple II. — *Pièce encastrée et chargée uniformément* (*Pl. IV, fig.* 61).

Équation de la fibre neutre. — Nous désignerons par F_1 la charge par unité de longueur en y comprenant le poids même de la pièce. La charge totale sera $F_1 l$ pour toute la pièce, et $F_1(l - x)$ pour la portion de droite que nous devons seule prendre en considération pour former l'équation de la fibre neutre.

Si nous l'appliquons par la pensée au milieu de la longueur, la somme des moments élémentaires ne sera pas changée. Ce moment sera donc, par rapport à la section variable, $\frac{F_1(l-x)^2}{2}$, et l'équation (3) deviendra

$$E\mu \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{F_1(l-x)^2}{2}.$$

Elle a pour intégrale

$$E\mu y = \frac{F_1}{2}\frac{(l-x)^4}{3.4}$$

avec deux termes arbitraires, l'un constant, l'autre en x. Mais nous devons, comme dans le cas précédent, supprimer toute cette partie pour exprimer l'encastrement à l'origine et borner le second membre à ses trois premiers termes :

$$24\,E\mu y = F_1(x^4 - 4lx^3 + 6l^2x^2).$$

Valeur de la flèche. — Nous l'aurons pour $x = l$:

$$F = \frac{F_1 l^4}{8E\mu}.$$

Si on remarque que $F_1 l$ remplace la quantité F de l'exemple précédent, on voit que la flèche n'est que les $\frac{3}{8}$ de celle du premier cas.

Valeur de la fatigue. — Elle correspond à l'encastrement (4)

$$\Phi = \frac{V.F_1 l.\frac{l}{2}}{E\mu} = \frac{VF_1 l^2}{2E\mu}.$$

Elle n'est plus que la moitié de celle du premier cas.

450. Exemple III. — *Pièce encastrée, chargée uniformément et sollicitée à son extrémité* (*Pl. IV, fig.* 61).

C'est la réunion des deux conditions précédentes, ou, si l'on veut, la correction apportée au premier exemple pour avoir égard au poids de la pièce.

Équation de la fibre neutre. — Nous l'obtiendrons en réunissant les deux précédentes :

$$E\mu y = \frac{F}{6}(3lx^2 - x^3) + \frac{F_1}{24}(x^4 - 4lx^3 + 6l^2x^2).$$

Valeur de la flèche :

$$f = \frac{l^3}{E\mu}\left(\frac{F}{3} + \frac{F_1 l}{8}\right).$$

Valeur de la fatigue :

$$\Phi = \frac{Vl}{E\mu}\left(F + \frac{F_1 l}{2}\right).$$

451. Exemple IV. — *Pièce posée sur deux appuis et chargée uniformément (Pl. IV, fig. 62).*

La charge totale étant $F_1 l$, chacun des points d'appui supporte l'effort $\frac{F_1 l}{2}$ et oppose une réaction égale. Chaque moitié de la pièce peut donc être considérée comme encastrée au milieu de la longueur totale et fléchie à son extrémité par cet effort $\frac{F_1 l}{2}$. Il suffit par suite d'appliquer les formules du cas précédent en changeant l en $\frac{l}{2}$ et F en $-\frac{F_1 l}{2}$, car les forces sont maintenant de sens opposés. Il vient ainsi :

Équation de la fibre neutre :

$$E\mu y = \frac{F_1}{48}(2x^2 - 3l^2)x^2.$$

Valeur de la flèche. — Nous aurons, sauf le signe,

$$f = \frac{5}{384}\frac{F_1 l^4}{E\mu}.$$

Elle n'est plus que les $\frac{15}{384}$, ou environ $\frac{1}{16}$ de celle du premier cas.

Valeur de la fatigue :

$$\Phi = \frac{VF_1 l^2}{8E\mu}.$$

Elle n'est plus que le huitième de celle du premier cas.

C'est au milieu de la pièce, dans l'encastrement fictif, qu'elle se développe.

452. Première application. — *Dents d'engrenage.* — Pour montrer par un exemple l'application de ces règles, considérons une dent d'engrenage. Bien que ce ne soit pas un prisme dans le sens du rayon, nous pouvons (453) l'assimiler à une pièce encastrée et sollicitée à son extrémité, car c'est pour l'instant où l'effort se transmet par ce point que la fatigue est maximum, et qu'il est nécessaire de mettre les dents en état de la supporter.

Nous avons trouvé dans ces conditions (448) :

$$\Phi = \frac{VFl}{E\mu}.$$

La section étant, dans le cas actuel, un rectangle, on a (447)

$$V = a, \qquad \mu = \frac{4}{3}a^3 b,$$

$$\Phi = \frac{3}{4E}\cdot\frac{l}{a^3 b}\cdot F.$$

L'usage est de faire la longueur b des dents proportionnelle à l'épaisseur a. La longueur l se détermine par la règle de l'échanfrinement toujours de la même manière. Elle est donc, au moins pour les petites dimensions qui sont le cas de la pratique, proportionnelle elle-même à l'épaisseur a. Comme, du reste, E et Φ deviennent des constantes spécifiques, quand on remplace Φ par la limite i que ne doit pas dépasser la fatigue (439), l'équation prend la forme (1)

$$a = k\sqrt{F}.$$

(1) Dans la pratique on emploie les coefficients suivants exprimés en millimètres quand F l'est en kilogrammes :

Fer et fonte..... $k = 1^{mm},05$
Cuivre et bronze..... $k = 1^{mm},31$
Charme et sorbier..... $k = 1^{mm},38$.

SECONDE APPLICATION. — *Tourillon.* — La réaction du coussinet est appliquée en un point intermédiaire, mais il sera bon de la reporter par la pensée à l'extrémité pour faire la part des circonstances défavorables. Le tourillon peut, du reste, être considéré comme encastré dans la masse de l'arbre, qui a une section notablement plus forte (364). On peut donc encore appliquer la formule (448)

$$\Phi = \frac{\mathrm{V}\mathrm{F}l}{E\mu}.$$

On a d'ailleurs, dans le cas actuel,

$$\mathrm{V} = r,$$

et pour le moment d'inertie (1),

$$\mu = \frac{\pi r^4}{4}.$$

Nous poserons donc

$$\Phi = \frac{4}{\mathrm{E}\pi} \cdot \frac{l}{r^3} \cdot \mathrm{F}.$$

Si l'on adopte un rapport constant entre la longueur et

---

(1) μ désigne le moment d'inertie de l'aire d'un cercle par rapport à un diamètre. Si nous appelons de même μ' celui qui est relatif au centre, on aura

$$\mu' = 2\mu.$$

En effet, le carré de la distance au centre est la somme des carrés des distances à deux diamètres rectangulaires. Le moment d'inertie pris par rapport au centre sera donc la somme de ceux qui sont relatifs à ces diamètres, ou le double de l'un d'eux, en raison de la symétrie du cercle.

On a d'ailleurs directement

$$\mu' = \int_0^r 2\pi r dr . r^2 = \frac{\pi r^4}{2},$$

et, par suite,

$$\mu = \frac{\mu'}{2} = \frac{\pi r^4}{4}.$$

le diamètre, cette formule prendra encore la forme

$$r = k\sqrt{F},$$

analogue à celle des dents d'engrenage, et dans laquelle le coefficient dépend du rapport adopté.

§ IV.

FORMES D'ÉGALE RÉSISTANCE.

453. Supposons que le solide au lieu d'être prismatique ait une section variable, calculée de manière que la fatigue maximum dans chaque section soit la même pour toutes. Ce qu'on ajouterait à une pareille pièce pour la rendre prismatique serait une superfétation, car il importe peu que la pièce soit soulagée dans une portion de son étendue par une augmentation de section, si, sur un seul point, la fatigue reste la même. Le corps rompra en effet par là, si cette fatigue dépasse la limite que la substance est en état de supporter. La forme en question est donc, à égalité de volume, la plus rationnelle pour la répartition de la matière employée. On la désigne sous le nom de *solide d'égale résistance*. Elle fournira notamment les *ressorts indicateurs* (316) les plus sensibles à égalité de résistance, puisqu'ils seront dégagés de toute partie inutile.

La recherche de ces formes ne peut se faire en rigueur à l'aide des formules précédentes, car elles supposent une pièce prismatique. Cependant, si nous considérons que ces résultats ne sont qu'approximatifs, et que les conditions actuelles n'introduisent aucun changement important, nous pourrons donner cette extension à la théorie, pourvu que les formes qu'elle indiquera ne présentent pas de variation brusque ou trop rapide. Dans ce cas, en effet, les hypothèses

sur lesquelles nous avons basé tout ce qui précède (440) ne se vérifieraient plus d'une manière suffisante.

454. Nous avons dans toute l'étendue du solide (2)

$$\frac{E\mu}{\rho} = \sum F(\Delta - x).$$

De plus, la condition de l'égale résistance s'exprimera par la condition

$$\frac{V}{\rho} = i,$$

le premier membre représentant la fatigue maximum (4). On tire de là, par l'élimination de ρ,

$$E i \mu = V \sum F(\Delta - x). \tag{5}$$

Telle est l'équation de la surface d'égale résistance. Elle est discontinue comme toutes nos formules générales, et le second membre perd un terme à chaque fois que l'on dépasse le point d'application d'une force. Elle est, du reste, loin de déterminer complétement la surface, et il faut, à cet égard, s'imposer de nouvelles conditions. J'en donnerai deux exemples généraux.

455. Premier genre. — *Pièce à sections homothétiques.* — On peut, en premier lieu, s'imposer la condition que la section reste partout semblable à elle-même. Ce sera, par exemple, un cercle, un carré, etc. Le moment d'inertie prendra alors la forme KV^4, proportionnelle à la quatrième puissance des dimensions, et l'équation deviendra

$$E i K . V^3 = \sum F(\Delta - x),$$

$$= \sum F\Delta - x \sum F,$$

équation d'une parabole cubique entre x et V, qui dessinera, dans ce cas, le profil de la pièce.

456. DEUXIÈME GENRE. — *Pièce à sections rectangulaires.* — On peut, en second lieu, s'imposer la condition que la section soit partout rectangulaire. On aura alors (447), en désignant les côtés variables par $2a$ et $2b$,

$$V = a, \quad \mu = \frac{4}{3} a^2 b,$$

et, par suite,

$$\frac{4}{3} E i . a^2 b = \sum F(\Delta - x).$$

Comme cette équation renferme d'ailleurs, outre l'abscisse x, deux variables a et b, on peut encore soumettre les dimensions du rectangle à une condition arbitraire. La plus simple consiste à laisser un des côtés constants, l'autre devenant par là l'ordonnée du profil de la pièce.

Pour effectuer complétement cette détermination, je reprendrai les problèmes que nous avons déjà traités à un autre point de vue (§ III).

457. EXEMPLE I. — *Pièce encastrée et sollicitée à son extrémité.*

L'équation (5) devient (448)

$$\frac{4}{3} E i . a^2 b = F(l - x).$$

Largeur constante. — L'ordonnée étant a, le profil est une parabole qui a son sommet à l'extrémité (*Pl. IV, fig.* 63). C'est la forme employée pour les *flasques* de dynamomètres (316), les *ressorts* de voiture (284), les *balanciers* de machines de rotation (162).

Hauteur constante. — L'ordonnée étant b, le profil est une ligne droite passant par l'extrémité, et à laquelle on adjoint pour la symétrie une droite également inclinée en sens contraire (*Pl. IV, fig.* 64).

458. EXEMPLE II. — *Pièce encastrée et chargée uniformément.*

L'équation (5) devient (449)

$$\frac{8}{3} E i . a^2 b = F_1 (l - x)^2.$$

Largeur constante. — L'ordonnée étant a, le profil se compose de deux droites symétriques (*Pl. IV*, *fig.* 65). C'est la forme précédente, mais elle est, dans le cas actuel, placée debout au lieu de l'être à plat.

Hauteur constante. — L'ordonnée étant b, le profil est une parabole qui a son sommet à l'extrémité (*Pl. IV*, *fig.* 66); mais elle n'est pas disposée comme dans le premier cas, elle est tangente à l'axe de la pièce au lieu de l'avoir pour axe de symétrie. On complète alors le profil par une parabole symétrique.

459. Exemple III. — *Pièce encastrée, chargée uniformément et sollicitée à son extrémité.*

L'équation (5) devient (450)

$$\frac{4}{3} E i . a^2 b = F (l - x) + \frac{F_1}{2} (l - x)^2.$$

Largeur constante. — L'ordonnée étant a, le profil est une hyperbole dont les asymptotes sont très-rapprochées, car E a une grande valeur, et dont le sommet se trouve à l'extrémité (*Pl. IV*, *fig.* 67).

Hauteur constante. — L'ordonnée étant b, le profil est une parabole qui passe par l'extrémité, sans toutefois y avoir son sommet. On complète le profil par la parabole symétrique (*Pl. IV*, *fig.* 68).

460. Exemple IV. — *Pièce posée sur deux appuis et chargée uniformément.*

L'équation se déduit de la précédente par les modifications qui ont été indiquées ci-dessus (451) :

$$\frac{8}{3} E i . a^2 b = F_1 \left(\frac{l^2}{4} - x^2 \right).$$

Largeur constante. — L'ordonnée étant a, le profil est une ellipse qui a son centre au milieu et ses sommets aux extrémités (*Pl. IV, fig.* 69). Elle dessine ainsi à elle seule toute la pièce.

Hauteur constante. — L'ordonnée étant b, le profil est une parabole qui passe aux extrémités et dont l'axe est perpendiculaire sur le milieu de la longueur. On complète le profil par une parabole symétrique (*Pl. IV, fig.* 70).

§ V.

TORSION.

461. *Préliminaires.* — Considérons encore une pièce de forme prismatique ou cylindrique, sollicitée par un couple dans un plan mené perpendiculairement par son extrémité. Nous admettrons, comme dans le cas précédent (440), que les tranches se conserveront pendant la torsion, chacune d'elles se mouvant dans son propre plan et tournant autour d'un certain point d'un angle θ. La succession des points immobiles forme l'axe ou la fibre neutre. Comme chaque tranche se dévie, en outre, de la même quantité par rapport à la précédente, l'angle de torsion varie proportionnellement à la distance à l'encastrement, et toutes les fibres rectilignes deviennent des hélices autour de l'axe neutre.

Considérons une fibre de section a. Elle exigera une certaine force transversale F pour maintenir sa forme héliçoïdale. Deux fibres pareilles exigeraient deux forces égales et, en les réunissant par la pensée, nous reconnaîtrons qu'une fibre de section $2a$ exigera une force 2F, ou, généralement, que la force transversale sera proportionnelle à la section.

Une fibre de longueur l exigeant la force F, si nous

adaptons en prolongement suivant la même hélice une fibre égale, il suffira, pour la maintenir, de transporter cette force F à son extrémité. Mais la torsion, qui était $r\theta$ pour l'extrémité de la première, étant aussi $r\theta$ pour celle de la seconde par rapport au point de jonction, sera en tout $2r\theta$. La longueur est également devenue $2l$, de sorte que le rapport $\frac{r\theta}{l}$ n'a pas changé de valeur. La force et ce rapport restent donc constants ensemble. Il est clair, du reste, qu'ils varieront aussi ensemble, ce qui montre que la force est une fonction de ce rapport. On reconnaîtra, du reste, comme ci-dessus (433), qu'on peut la supposer simplement proportionnelle. Et, par suite, l'expression complète de la tension élastique transverse devient, en désignant par G une constante spécifique,

$$F = G r \frac{\theta}{l} a.$$

462. Ces raisonnements, identiques à ceux du § 433, ont encore besoin du contrôle de l'expérience. Elle a, en effet, montré que la formule se vérifie dans des limites suffisamment restreintes. On peut alors, d'après M. le général Morin, employer, pour le coefficient d'élasticité transverse, les valeurs suivantes :

Acier fondu.....	$G = 100.10^6$
Fer en barres.....	$G = 67.10^6$
Cuivre.....	$G = 44.10^6$
Fonte.....	$G = 20.10^6$
Bronze.....	$G = 11.10^6$
Bois.....	$G = 4.10^6$

Quant aux coefficients de rupture transverse, ils sont moins bien connus que les précédents. On admet pour le fer qu'il est les $\frac{4}{5}$ du coefficient de rupture par extension.

463. *Fibre neutre.* — Nous pouvons facilement déterminer la position de la fibre neutre dans le prisme.

En effet, les forces de torsion formant un couple à l'extrémité de la pièce, si nous faisons par la pensée une section quelconque, les forces d'élasticité qui sont développées dans cette section devront, pour l'équilibre, former un autre couple. La somme de leurs projections sera donc nulle sur un axe quelconque des x. Mais l'expression de la force contenant le rayon r, sa projection s'en déduira en remplaçant r par x. On aura ainsi

$$\sum \mathrm{G} x \frac{\theta}{l} a = 0,$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{G} \frac{\theta}{l} \sum ax = 0;$$

car nous avons reconnu que le rapport $\frac{\theta}{l}$ est constant. Il reste donc

$$\sum ax = 0,$$

et comme x est la distance de chaque élément a à un plan mené perpendiculairement à l'axe des abscisses par le point neutre, on voit que ce plan contient le centre de gravité. Il est, du reste, quelconque, et, par suite, le point neutre doit être lui-même ce centre de gravité. Ainsi la fibre neutre est encore celle qui contient les centres de gravité de toutes les sections.

464. Pour évaluer la torsion $\frac{\theta}{l}$, posons l'équation des moments par rapport à la fibre neutre. M étant le moment du couple appliqué à l'extrémité, on aura

$$\mathrm{M} = \sum \mathrm{G} \frac{\theta}{l} ra.r = \mathrm{G} \frac{\theta}{l} \sum ar^2 = \frac{\mathrm{G}\mu\theta}{l},$$

si μ désigne le moment d'inertie de la tranche par rapport

à un axe élevé par son centre de gravité perpendiculairement à son plan (¹).

On tire de là

$$\frac{\theta}{l} = \frac{M}{G\mu}.$$

Si le prisme est sollicité par plusieurs couples en différents points, on aura

$$\frac{\theta}{l} = \frac{\Sigma M}{G\mu}.$$

le signe Σ s'étendant à tous ceux qui sont situés au delà de la portion considérée. Cette valeur est, du reste, discontinue pour les différentes parties du prisme. Elle varie brusquement chaque fois que l'on franchit le plan d'un couple (434, 444).

465. *Fatigue.* — La force appliquée à une fibre a étant $Gr\frac{\theta}{l}a$, sa fatigue φ, ou l'effort rapporté à l'unité de section, aura pour valeur

$$\varphi = \frac{r\theta}{l} = r\frac{\Sigma M}{G\mu}.$$

Le maximum aura lieu en général dans la portion rapprochée de l'encastrement (²), et pour le rayon le plus grand :

$$\Phi = R\frac{\Sigma M}{G\mu}.$$

C'est pour cette raison que l'on donne ordinairement une section décroissante aux *arbres de couche* qui pré-

(¹) Il faut éviter de le confondre avec celui qui figure dans la théorie de la flexion. L'axe de ce dernier passait aussi par le centre de gravité, mais il était mené dans le plan même de la tranche, perpendiculairement au plan de la flexion.

(²) A moins que les couples ne soient pas tous de même signe (434, note).

sentent une grande longueur à partir de la machine motrice, car l'expression de la fatigue perd un terme à mesure qu'on franchit le point d'application d'une transmission. On devra veiller à ce qu'il ne dépasse pas la limite i que l'on doit se fixer (462) pour éviter la rupture.

466. La forme de la section n'est pas indifférente au point de vue de la fatigue. Il convient de reporter les éléments de la surface le plus loin possible du centre dans toutes les directions. Par là, à la vérité, R augmente, mais μ croît lui-même comme son carré, de sorte que Φ diminue en définitive. Aussi les *arbres en fonte* sont-ils toujours des cylindres creux.

Cependant, comme nous l'avons déjà remarqué (446), pour le fer et pour le bois on doit s'en tenir aux formes pleines. On a alors le choix du carré ou du cercle, car tous les polygones réguliers donneront des effets intermédiaires, et il n'y a aucune raison pour employer des polygones irréguliers.

Pour savoir laquelle de ces deux formes sera la plus rationnelle, considérons un carré de côté c : le rayon maximum sera

$$R' = \frac{c}{\sqrt{2}},$$

et le moment d'inertie

$$\mu' = \sum ar^2 = \sum a(x^2+y^2) = \sum ax^2 + \sum ay^2 = 2\sum ax^2,$$

les deux sommes étant égales en raison de la symétrie. Par suite

$$\mu' = 2\int_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} c\,dx.\,x^2 = \frac{c^4}{6}.$$

On aura donc pour la fatigue proportionnelle

$$\Phi' = \frac{R'}{\mu'} = \frac{3\sqrt{2}}{c^3}.$$

Le cercle devant être comparé à surface égale, son rayon maximum R'' sera déterminé par la relation

$$\pi R''^2 = c^2,$$

$$R'' = \frac{c}{\sqrt{\pi}}.$$

Le moment d'inertie a, dans ce cas, pour valeur

$$\mu'' = \int_0^{R''} 2\pi r dr . r^2 = \frac{\pi R''^4}{2} = \frac{c^4}{2\pi}.$$

On aura donc pour la fatigue proportionnelle

$$\Phi'' = \frac{R''}{\mu''} = \frac{2\sqrt{\pi}}{c^3},$$

Le rapport des fatigues étant d'après cela

$$\frac{\Phi'}{\Phi''} = \frac{3}{\sqrt{2\pi}} = 1,237,$$

l'avantage reste à la forme ronde, pour laquelle la fatigue est moindre d'environ $\frac{1}{6}$. Cette forme est, en effet, toujours employée pour les *arbres en fer*, et si l'on ne l'applique pas aux *arbres en bois*, il faut l'attribuer à ce que ces derniers sont ordinairement formés, en raison de leur grosseur, de plusieurs morceaux. Ces pièces de bois étant assemblées suivant des parois planes, il est naturel de les équarrir sur toutes leurs faces, ce qui attribue à l'ensemble un contour polygonal.

§ VI.

PIÈCES EN MOUVEMENT.

467. Les tensions sont loin d'être les mêmes dans le repos et dans le mouvement. Lorsqu'il s'agit de constructions fixes, on évite facilement cette difficulté qui ne se présenterait qu'à l'instant du décintrement, en raison du tassement que provoque la mise en charge. Il suffit d'effectuer ce décintrement avec une extrême lenteur. Mais pour les machines, le mouvement est, au contraire, la condition normale, et il est nécessaire de se préoccuper de ses conséquences.

On peut citer comme exemple, pour le cas de l'extension, les tiges de *ponts suspendus* qui oscillent suivant leur longueur au passage des véhicules chargés; pour le cas de la flexion, les *rabats* des martinets (284) qui fouettent rapidement sous le choc de la tête du marteau; pour la torsion, *la balance de Coulomb* dont les oscillations sont employées pour la mesure des petites forces.

Ces trois ordres de problèmes peuvent être renfermés dans un même type de calcul lorsqu'on recherche la loi suivant laquelle l'altération de la forme varie avec le temps. En effet, la force a pour tous la même expression, l'effort élastique restant proportionnel à la déformation (433), (448), (461). Aussi l'analyse suit-elle une marche identique, sauf le changement des coefficients. Ses conclusions seront donc les mêmes pour les trois cas, et je me contenterai de les développer pour celui de la traction directe.

468. Nous supposerons un prisme sollicité par un poids P qui, dans l'état de repos, y déterminerait l'allongement λ.

Sa tension F, pour un allongement variable x, sera donc

$$F = P\frac{x}{\lambda},$$

puisque les forces sont proportionnelles aux allongements (433). Supposons que le poids soit abandonné à lui-même à partir de la position naturelle, sans vitesse initiale, et posons l'équation des forces vives depuis cet instant jusqu'à un autre quelconque, en faisant abstraction de la masse de la tige.

La demi-force vive sera $\frac{1}{2}\frac{P}{g}v^2$, le travail de la pesanteur Px, celui de l'élasticité

$$\int_0^x F\,dx = \int_0^x P\frac{x}{\lambda}\,dx = \frac{Px^2}{2\lambda}.$$

L'équation sera par suite

$$P\frac{v^2}{2g} = Px - \frac{Px^2}{2\lambda},$$

ou, en remplaçant v par $\frac{dx}{dt}$,

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{g}{\lambda}(2\lambda x - x^2),$$

d'où

$$\sqrt{\frac{g}{\lambda}}\,dt = \frac{dx}{\sqrt{2\lambda x - x^2}},$$

avec le signe positif, car x augmente en même temps que t. Comme on peut d'ailleurs écrire

$$\sqrt{\frac{g}{\lambda}}\,dt = \frac{-\,d\left(\frac{\lambda - x}{\lambda}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda - x}{\lambda}\right)^2}},$$

on aura, en intégrant,

$$\sqrt{\frac{g}{\lambda}}\,t = \arccos\frac{\lambda - x}{\lambda},$$

sans constante, car l'équation se trouve satisfaite pour

$$t = 0, \quad x = 0.$$

En résolvant inversement cette formule elle donne

$$x = \lambda \left(1 - \cos t \sqrt{\frac{g}{\lambda}} \right).$$

Pour interpréter ce résultat, imaginons un cercle dont le centre se trouve à l'extrémité de la tige allongée au repos sous l'empire du poids P, et qui soit décrit avec le rayon λ, de manière à passer par l'extrémité de la tige dans son état naturel ; supposons, en outre, qu'un mobile le parcourre uniformément avec une vitesse angulaire $\sqrt{\frac{g}{\lambda}}$; la projection de ce mobile sur la tige marquera à chaque instant la position du poids, car l'équation de ce mouvement projeté serait précisément celle que nous venons d'obtenir.

On voit ainsi que l'extrémité de la tige ne s'arrêtera qu'au delà du centre, à une distance égale au rayon. En d'autres termes, l'allongement dynamique est double de l'allongement statique. La fatigue croît donc dans la même proportion, et l'on peut juger par là de l'importance de ces considérations, puisqu'elles nous conduisent, dans le cas actuel, à doubler les résultats fournis par les théories précédentes.

FIN.

Fig. 7. *(Page 47)*

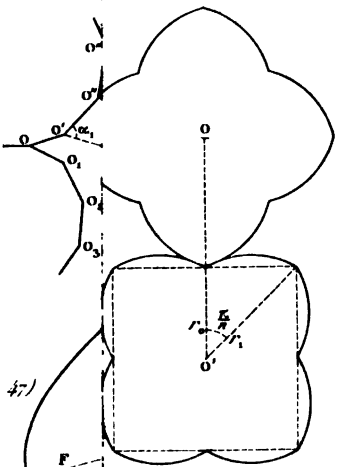


Fig. 8. *(Page 46)*

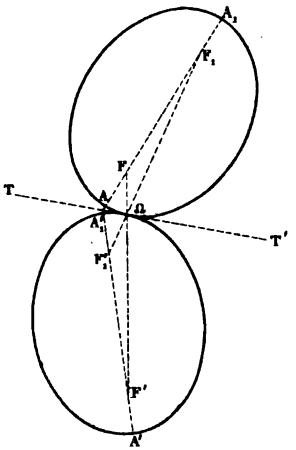


Fig. 3

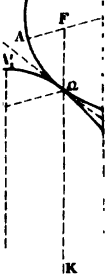
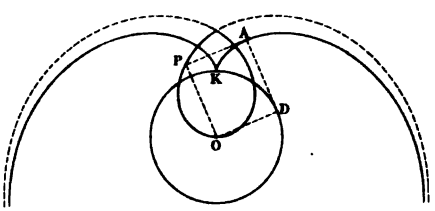


Fig. 19. *(Page 80)*



(Page 91)

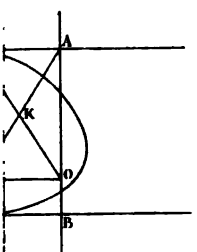
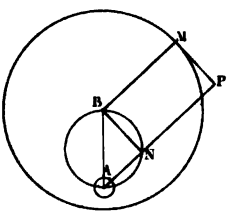


Fig. 20. *(Page 90)*



Dulos sc.

Fig. 28. *(Page 106)*

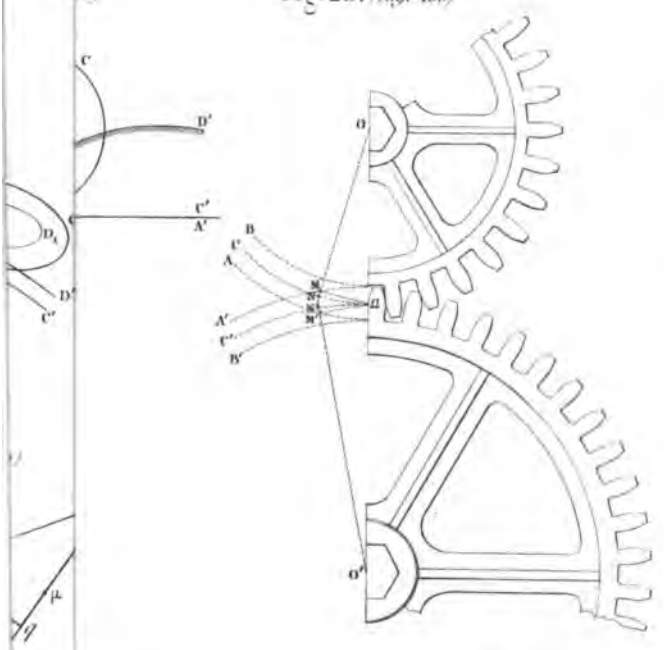


Fig. 33. *(Page 109)*

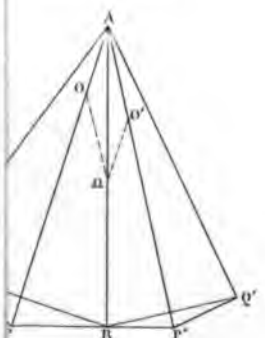
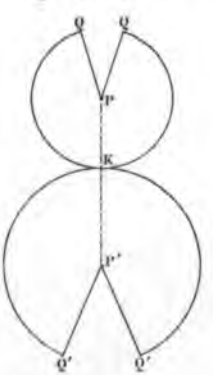


Fig. 34. *(Page 109)*



UNIV. OF MICH.

. 41. 8. *(Page 174)*

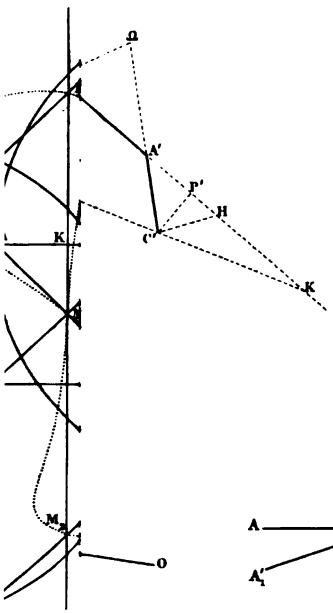


Fig. 39. *(Page 175)*

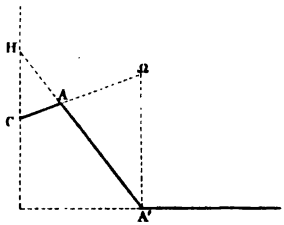


Fig. 45. *(Page 221)*

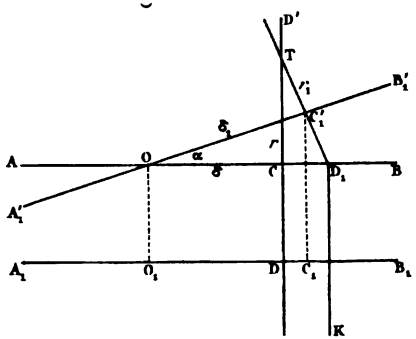
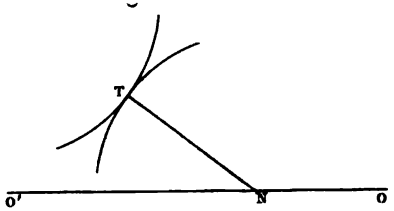
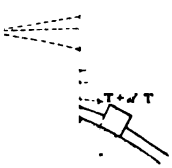


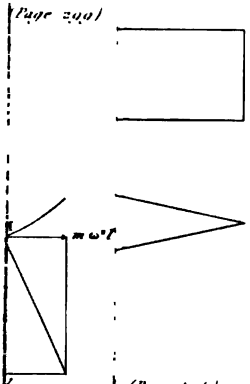
Fig. 50. *(Page 251)*





(Page 473)

(Page 200)



(Page 474)

Fig. 58. (Pa

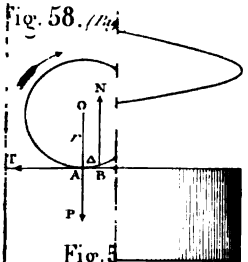


Fig. 5

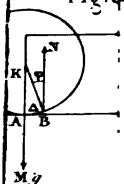


Fig. 60.

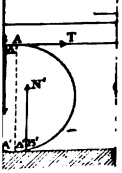


Fig. 65. (Page 474)

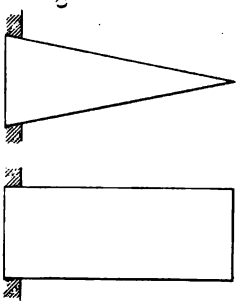


Fig. 68. (Page 474)

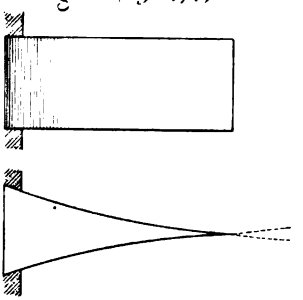
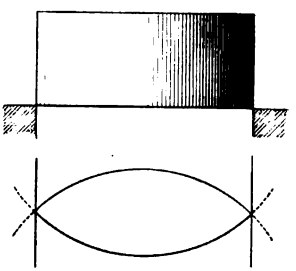


Fig. 70. (Page 475)



Dulos sc.

UNIV. OF MICH.

Fig

Suspe

Fig. 75. *(Page 38)*

Roues à boudin.

-8. *(Page 41)*

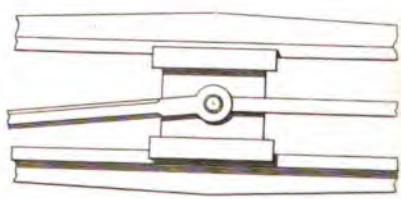
er à Galets.

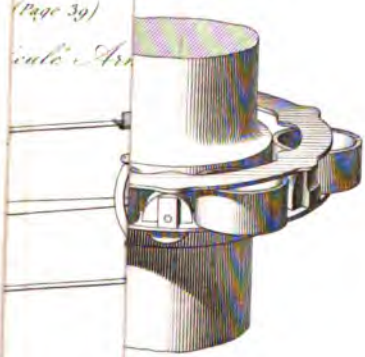
(Page 39)

ulé Ar

Fig. 79. *(Page 66)*

Glissière des locomotives.



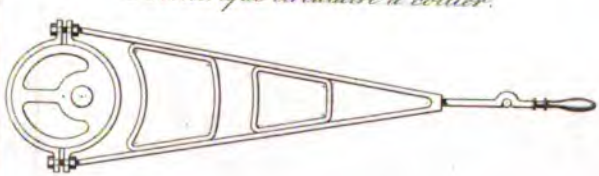


(Page 67)

le relieur

Fig. 85. *(Page 69)*

Excentrique circulaire à collier.



UNIV. DE WIEN

Dulos sc.

(Page 72)

rotation.

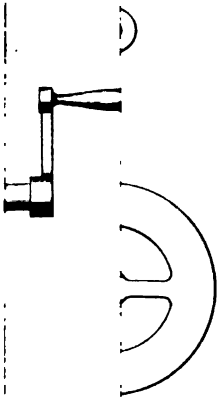


Fig. 91. (Page 73)

Rigolette de Nicomède.

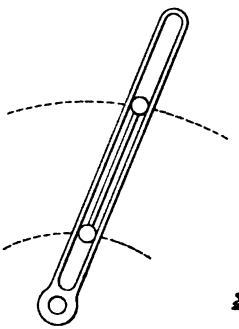
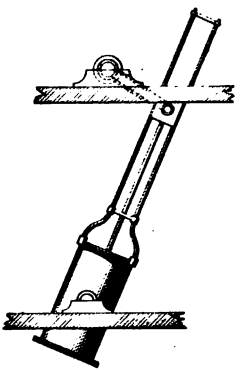


Fig. 92. (Page 73)

Machine oscillante de Cavé.



F

(Page 83)

à ondes.

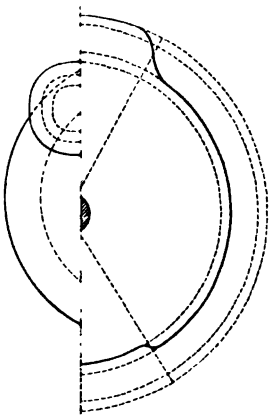
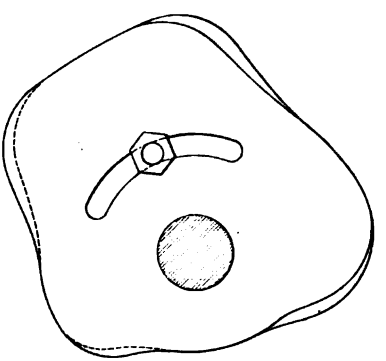


Fig. 101. (Page 87)

Excentrique de Saulnier.

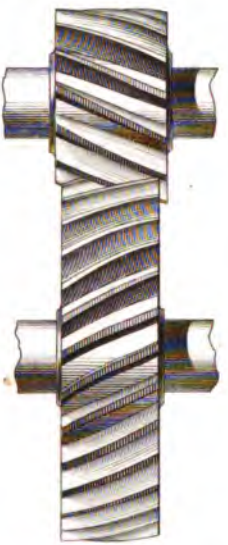


UNIV. OF MICH.

Dulos sc

Fig. 108. *(Page 117)*

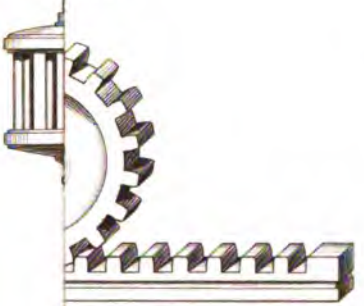
Engrenage de White.



F

Eng *(Page 115)*

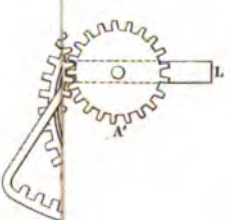
illère.

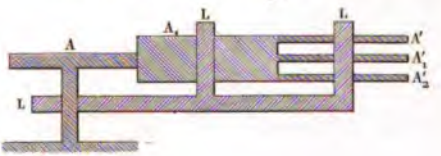


dal.

Fig. 114. *(Page 155)*

Paradoxe de Ferguson.





UNIV OF MICH

Dulos sc.

Fig. 119. *(Page 158)*

Grain à pointes.

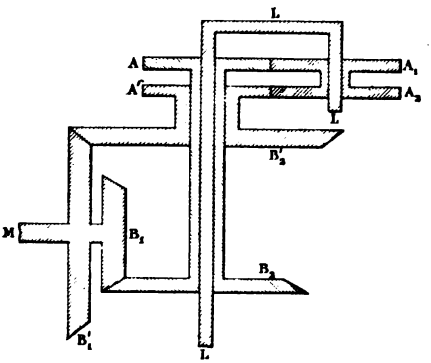


Fig. 124. *(Page 165)*

Rouage d'Huyghens.

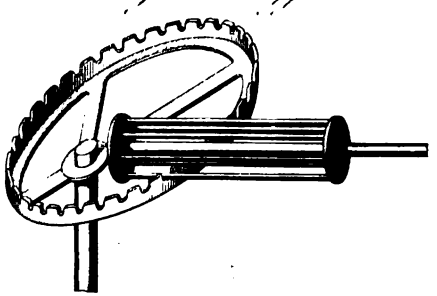
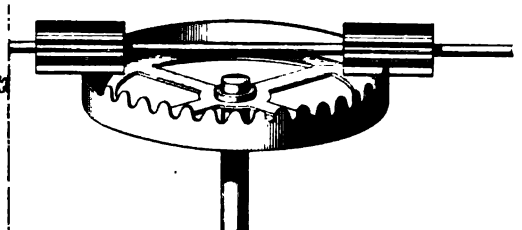


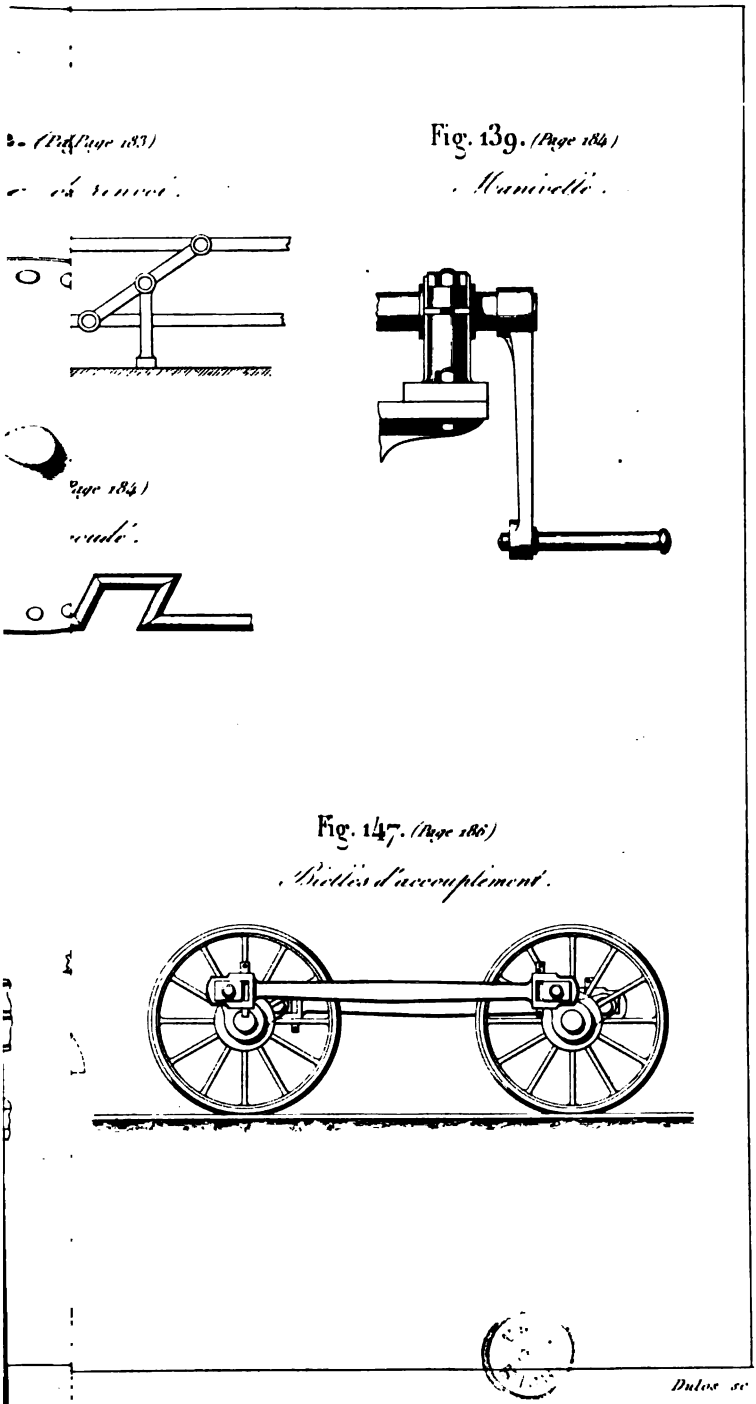
Fig. 130. *(Page 171)*

Double Pignon oscillant.



UNIV OF MICH

Dulos sc

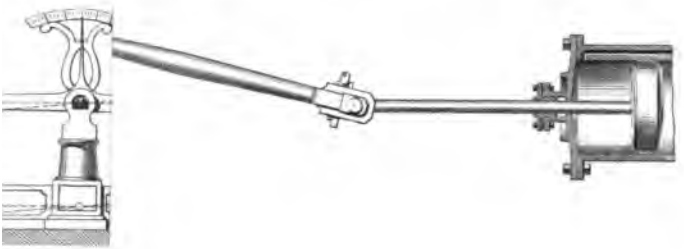

(Page 183)
Fig. 139. (Page 184)
Manivelle.
Page 184)
Fig. 147. (Page 186)
Biellés d'accouplement.

Dulos sc

. 149. (Pa

Fig. 152. (Page 188)

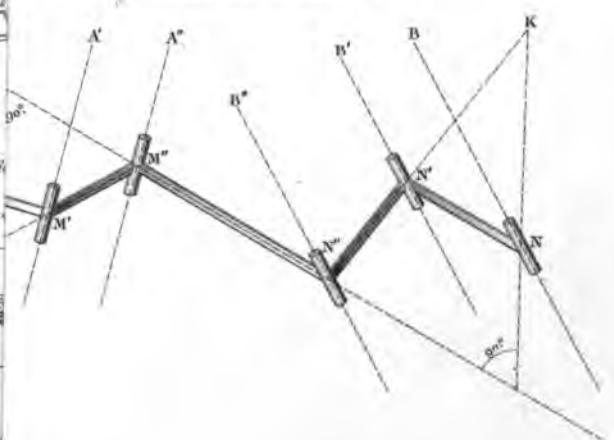
Machine à connexion directe.



(184)

Fig. 160. (Page 191)

Système de Sarrut.



UNIV. OF ILL.

(Page 208)

Fig. 167. (Page 208)

Chaine de Gall.

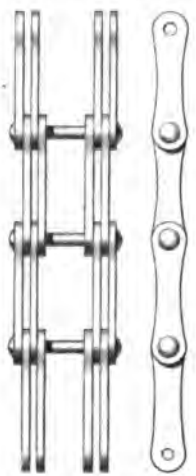


Fig. 168. (Page 209)

Poulie.

Fig. 169. (Page 209)

Secteur oscillant.

79. (Page 218)

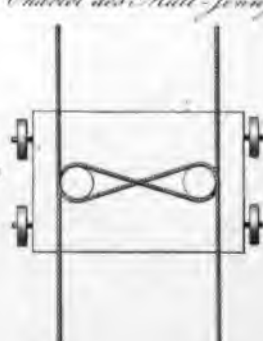
...et à forer.

Fig. 180. (Page 218)

Drille.

Fig. 181. (Page 218)

Chariot des Mull-Jenny.



UNIV. OF MICH.

Dulos sc.

(Page 206)

Fig. 167. (Page 206)

Chaine de Gall.

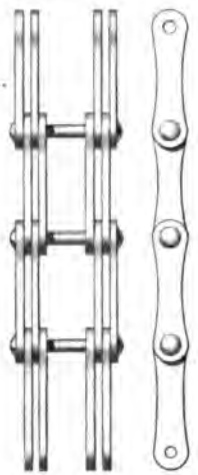
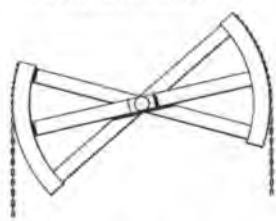


Fig. 168. (Page 209)

Poulie.

Fig. 169. (Page 209)

Secteur oscillant.



79. (Page 218)

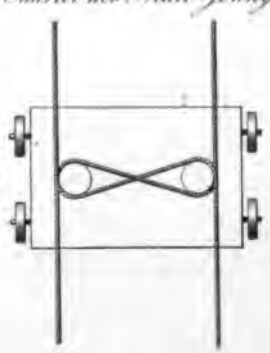
...hit à forer.

Fig. 180. (Page 218)

Drille.

Fig. 181. (Page 218)

Chariot des Mull-Jenny.



UNIV. OF MICH.

Dulos sc.

Fig. 187. *(Page 228)*

Barres d'excentriques.

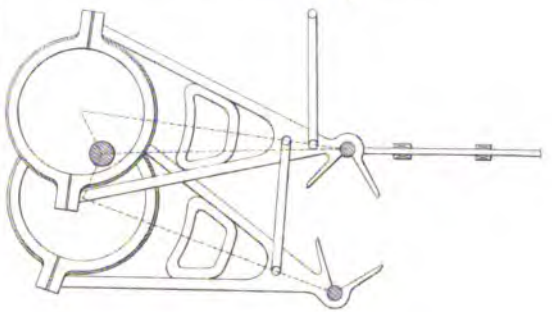


Fig. 193. *(Page 241)*

Mandrin à griffes obliques.

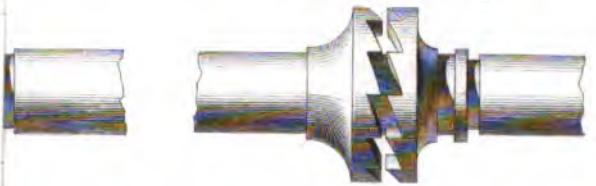
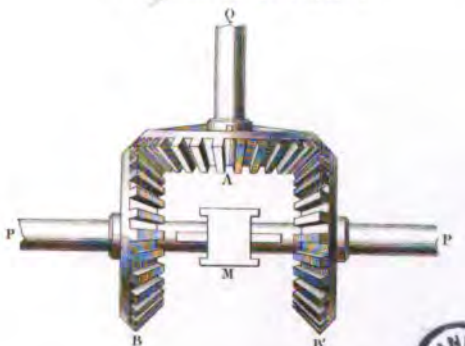


Fig. 199. *(Page 243)*

Changement de marche.



UNIV. OF MICH.

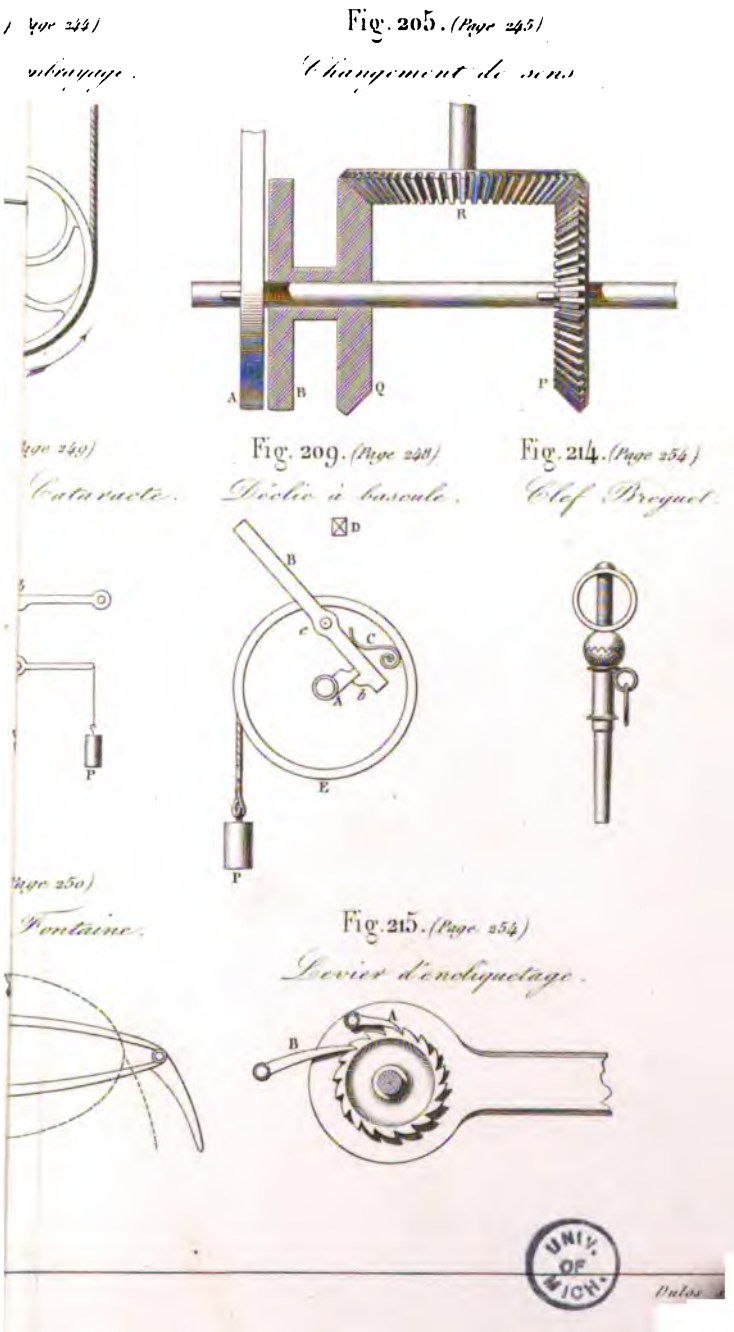


Fig. 205. (Page 245)
Changement de sens
R
A
B
Q
P
Fig. 209. (Page 248)
Déclic à bascule.
D
B
c
C
A
b
E
P
Fig. 214. (Page 254)
Clef Breguet.
Fig. 215. (Page 254)
Levier d'encliquetage.
A
B
Dulos

Fig. 221. *(Page 261)*

Échappement à cylindre.

Fig. 226. *(Page 263)*

Frein Saignat

UNIV. OF MICH.

Fig. 233.
Cabl
de contre

Fig. 237. *(Page 305)*
Régulateur de Watt.

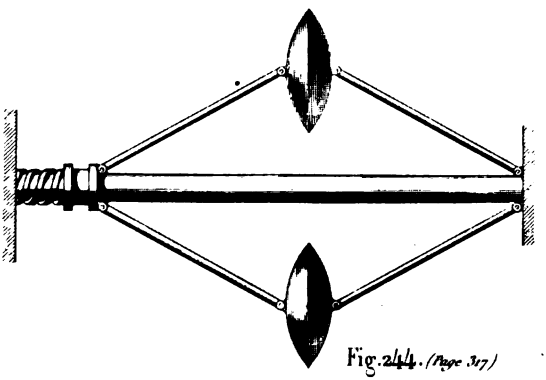
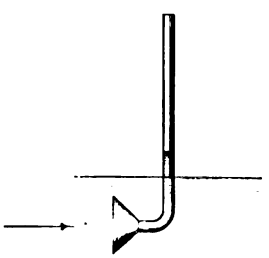


Fig. 244. *(Page 317)*
Sympiézomètre.

Fig. 243. *(Page 316)*
Tube de Pitot.



313)
ligne.

Fig. 246. *(Page 322)*
Appareil Morin.

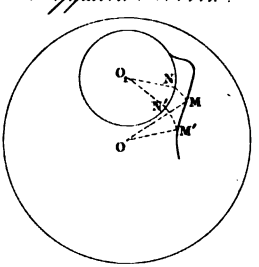


Fig. 245. *(Page 321)*
Appareil d'Eytelwein.

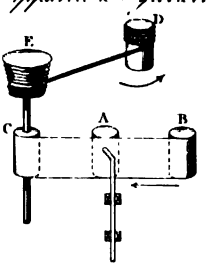
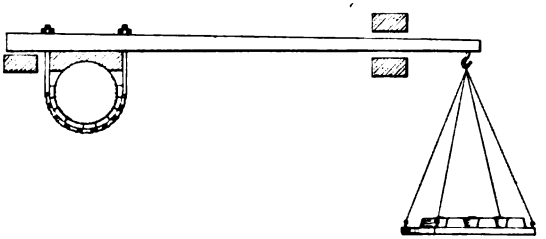
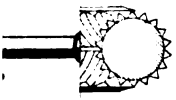


Fig. 252. *(Page 331)*

Frein de Prony





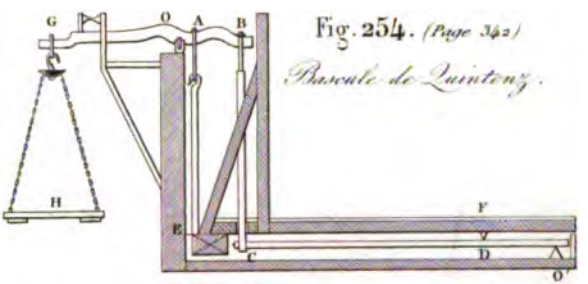


Fig. 254. *(Page 342)*

Bascule de Quintenz.

Fig. 261. *(Page 395)*

Godet-graisseur.

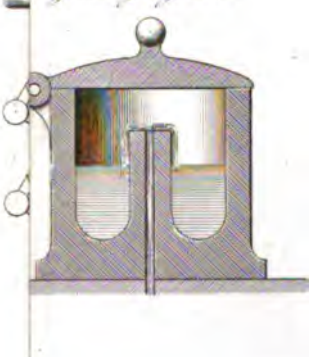
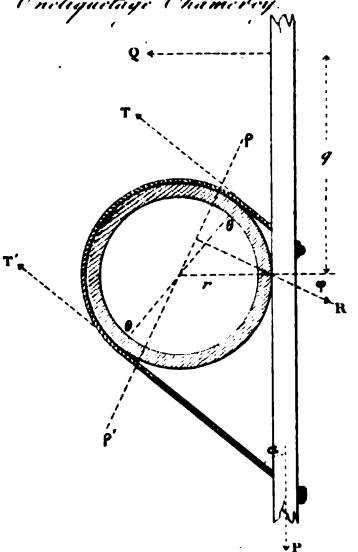


Fig. 262. *(Page 421)*

Enclenchetage Chameroy.



UNIV. OF MICH.